MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
MÜNSTER

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. HERGLOTZ
A. E. INGHAM H. KNESER O. PERRON
W. SÜSS H. WEYL

52. BAND 6. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 29. APRIL 1950)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1950

Math.
Z.

Preis DMark 21.60

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

erscheint zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden von etwa 50 Bogen vereinigt werden.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sind stets besonders (etwa mit einem farbigen Stift) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Eßlinger Straße 16,
K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6,
R. Nevanlinna, Helsinki,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstr. 8 (Mathematisches Institut),
F. K. Schmidt, Münster/W., Schlaunstr. 4.

52. Band. **Inhalt:** 6. Heft.

Seite

Kneser, H., Tübingen, Brunnstr. 31: Die Potenzreihe der reziproken Gammafunktion 655

Tricomi, Prof. F. G., California Institute of Technology, Pasadena (Calif.) USA: Über die Abzählung der Nullstellen der konfluenten hypergeometrischen Funktionen 669

Szegö, Prof. Dr. G., Department of Mathematics Stanford University, Stanford (Calif.) USA: Über eine Verallgemeinerung des Dirichletschen Integrals 676

Steuerwald, Prof. Dr. R., Alzing 49 1/3, Post Bergen 2 (Obbay.): Über die Perioden regelmäßiger Kettenbrüche für Quadratwurzeln aus ganzen Zahlen 686

Süss, Prof. Dr. W., Freiburg in Br., Goethestr. 66: Ein affines Analogon zur Bestimmung einer Fläche aus einer Grundform und einer Krümmungsfunktion durch W. Scherrer 698

Carathéodory †, Prof. Dr. C., Bemerkung über die Definition der Riemannschen Flächen 703

Bohr, Prof. Dr. H., Kopenhagen (Dänemark), St. Kannikestr. 2 (Regensen): Zur Theorie der Dirichletschen Reihen 709

Barnett, Prof. I. A., und Mendel, Prof. C. W., Department of Mathematics University of Cincinnati, Cincinnati (Ohio) USA: Generalized Determinants of Vandermonde 723

Müller, Prof. Dr. M., Tübingen, Mathem. Institut der Universität: Bemerkungen zur Fehlertheorie 735

Nagell, Prof. Dr. T., Matematiska Institution, Uppsala (Schweden), Uppsala Universitets: Über die Anzahl der Lösungen gewisser diophantischer Gleichungen dritten Grades 750

Die Potenzreihe der reziproken Gammafunktion.

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag am 7. Mai 1950 gewidmet.

Von

Hellmuth Kneser in Tübingen.

Die Haupteigenschaften der Gammafunktion, ihre Differenzengleichung, Ergänzungs- und Produktformel sowie ihre Darstellung durch ein unendliches Produkt, haben keinen engen Zusammenhang mit ihrer Darstellung durch Potenzreihen. Immerhin ist aber der Kehrwert der Gammafunktion eine der grundlegenden ganzen Funktionen der Analysis, und so mag es lohnen, ihre — überall konvergente — Potenzreihe zu untersuchen. Wir setzen sie in der Form

$$\frac{1}{\Gamma(1-s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} s^n \tag{1}$$

an. Natürlich kann man jeden einzelnen Beiwert c_n aus dem Produkt

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(1-s)} &= e^{-Cs} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{n}\right) e^{s/n} \\ &= \exp\left(-Cs - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{s^m}{m n^m}\right) \\ &= \exp\left(-Cs - \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\zeta(m)}{m} s^m\right)\end{aligned}$$

durch die Eulersche Konstante C und die Werte $\zeta(2), \zeta(3), \ldots$ der Riemannschen Zetafunktion ausdrücken; aber diese Ausdrücke geben keine Auskunft über die Größe und das Vorzeichen von c_n bei großem n. Wir greifen deshalb zu der additiven Darstellung der Funktion (1) durch das Hankelsche Integral

$$\frac{1}{\Gamma(1-s)} = \frac{1}{2\pi i} \int w^{s-1} e^w \, dw. \tag{2}$$

Entwickelt man in ihm den Integranden nach Potenzen von s und integriert man nach Gliedern, so ergibt sich für c_n ein Integral, das zur Paßintegration einlädt. Wir werden diese durchführen bis zu dem folgenden Ergebnis:

Die Gleichung

$$z e^z = -n \quad (z = x + yi) \tag{3}$$

hat für $n \geqq 1$ *genau eine Wurzel* p *im Streifen* $0 < y < \pi$. *Mit ihr gilt*

$$\begin{aligned} c_n &= \sqrt{\frac{2 \ln n}{\pi n}}\, \mathrm{Im}\,[p^n e^{-n/p}(1 + o(1))] \\ &= \sqrt{\frac{2 \ln n}{\pi n}}\, |p|^n \exp(-n \,\mathrm{Re}\,(p^{-1}))\,\{\sin n(\arg p - \mathrm{Im}\,(p^{-1})) + o(1)\}\,^{1}). \end{aligned} \tag{4}$$

Was dies Hauptergebnis bedeutet, wird erst klar durch die folgende Aussage über die Abhängigkeit der komplexen Funktion p von n:

Bei hinreichend großem n *konvergiert und gilt eine Reihendarstellung*

$$\begin{aligned} p = {} & \ln n - \ln\ln n + \frac{\ln\ln n}{\ln n} + \frac{1}{\ln n^2}\left(\frac{1}{2}\ln\ln n^2 - \ln\ln n - \frac{1}{2}\pi^2\right) + \\ & + \frac{1}{\ln n^3}\left(\frac{1}{3}\ln\ln n^3 - \frac{3}{2}\ln\ln n^2 + (1 - \pi^2)\ln\ln n + \frac{3}{2}\pi^2\right) + \cdots \\ & + \pi i\Big[1 - \frac{1}{\ln n} + \frac{1}{\ln n^2}(-\ln\ln n + 1) + \\ & + \frac{1}{\ln n^3}\left(-\ln\ln n^2 + 3\ln\ln n + \frac{1}{3}\pi^2 - 1\right) + \cdots\Big]. \end{aligned} \tag{5}$$

Sie ist bis auf die ersten beiden Glieder eine Doppelpotenzreihe in den Größen $\ln\ln n/\ln n$ *und* $1/\ln n$, *so daß man die weggelassenen Glieder in ein* $O(\ln\ln n^4/\ln n^4)$ *zusammenfassen oder bei früherem Abbrechen entsprechend verfahren kann.*

Man sieht hieraus, daß man nicht ohne Verlust an Gehalt der Aussage in (4) für p einen festen Abschnitt der Reihe (5), ergänzt durch ein O-Glied einsetzen kann; denn das O-Glied würde immer etwa $O(\ln z^{-k})$ lauten und könnte nie auf die Größenordnung $o(1/n)$ gebracht werden, während die p enthaltenden Teile von (4) immer den Faktor oder Exponenten n mit sich führen.

Durch (4) werden anscheinend der Folge (c_n) dauernde Vorzeichenwechsel beigelegt. Auch über diese werden wir genauen Aufschluß bekommen; wir beweisen:

Das Argument des Sinus in (4) *nimmt bei jedem genügend großen* k *Werte aus der Strecke* $(k + \frac{1}{2})\pi < \varphi < (k + \frac{3}{2})\pi$ *an. Zwischen diesen und den in derselben Weise zu* $k + 1$ *statt* k *gehörenden Werten von* n *wechselt die Folge* (c_n) *genau einmal das Vorzeichen.*

---

[1]) Um die Formeln mit gehäuften Logarithmenzeichen etwas zu kürzen, sei die folgende Verabredung getroffen: $\ln z$ bezeichnet den durch $-\pi < \mathrm{Im}\,(\ln z) \leqq \pi$ festgelegten Wert des natürlichen Logarithmus; ferner sei $\ln z^{-1} = (\ln z)^{-1}$ und entsprechend in ähnlichen Fällen. Z. B. würde $3\ln\ln z^2$ ausführlich geschrieben so lauten: $3(\log\log z)^2$.

Die Abschätzungen werden im folgenden ohne viel Rücksicht auf ihre zahlenmäßige Brauchbarkeit vorgenommen. Bei etwas sparsamerem Verfahren werden sie aber auch zur Zahlenrechnung brauchbar. Frl. A. Wiedersheim hat in ihrer Tübinger Prüfungsarbeit die Probe darauf gemacht: eines ihrer Ergebnisse ist $c_n > 0$ für $n = 1000001$.

§ 1.

Ansatz zur Paßintegration.

In (2) kann der Integrationsweg folgendermaßen gewählt werden: sei $\frac{1}{2}\pi < \beta < \pi$ und $r > 0$; dann führe der Weg längs der Graden $\arg w = -\beta$ aus dem Unendlichen nach $re^{-\beta i}$, von da längs des Kreises $|w| = r$ im positiven Sinne nach $re^{\beta i}$, von da längs der Graden $\arg w = \beta$ ins Unendliche. Setzen wir $w = e^z$, $z = x + yi$, so erhalten wir den folgenden Weg: von rechts aus dem Unendlichen wagerecht nach $lr - \beta i$, von da senkrecht nach $lr + \beta i$, von da wagerecht nach rechts ins Unendliche. Wir wollen gleich, weil es später bequem ist, $r = e^{\pi}$, $lr = \pi$ setzen, bezeichnen den Weg mit L und haben dann

$$\frac{1}{\Gamma(1-s)} = \frac{1}{2\pi i}\int_L e^{sz}\exp(e^z)\,dz.$$

Entwickeln wir den Faktor e^{sz} in die Exponentialreihe und integrieren wir gliedweise, so wird

$$\frac{1}{\Gamma(1-s)} = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^n}{n!}\int_L z^n\exp(e^z)\,dz,$$

und durch Vergleich mit (1) erhalten wir

$$2\pi i\, c_n = \int_L z^n\exp(e^z)\,dz. \tag{6}$$

Die Integration nach Gliedern bei der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}\exp(e^z)\,s^n z^n/n! \tag{7}$$

ist auf dem senkrechten Teil von L wegen ihrer gleichmäßigen Konvergenz zulässig. Auf den wagerechten Teilen ist $|y| = \beta < \pi \leqq x$, $|z| < x\sqrt{2}$; also ist

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\exp(e^z)|\,(x|s|\sqrt{2})^n/n! = \exp\left(e^x\cos\beta + x|s|\sqrt{2}\right)$$

eine konvergente Majorante von (7). Da die rechte Seite wegen $\cos\beta < 0$ ein konvergentes Integral von $x = \pi$ bis $x = \infty$ liefert, war die Integration nach Gliedern auch auf den wagerechten Teilen von L zulässig.

Die obere Hälfte des Weges L, also der Weg von π über $\pi+\beta i$ nach $\beta i+\infty$ heiße H; die untere ist das Spiegelbild von H an der reellen Achse, in umgekehrter Richtung durchlaufen. Statt (6) können wir also

$$2\pi i c_n = \int_H z^n \exp(e^z)\, dz - \int_{\bar{H}} z^n \exp(e^z)\, dz$$

schreiben. Da der Integrand bei konjugierten Werten von z selbst konjugierte Werte annimmt, ist das zweite Integral konjugiert zum ersten, und wir haben

$$\pi c_n = \operatorname{Im} \int_H z^n \exp(e^z)\, dz. \tag{8}$$

§ 2.

Der Paß.

Die Betragsfläche des Integranden über der z-Ebene hat, wenn $n>0$ ist, eine Mulde bei $z=0$ und ein Tal, das sich in der Breite $\frac{1}{2}\pi < y < \frac{3}{2}\pi$ wagerecht nach rechts ins Unendliche erstreckt. Mulde und Tal werden — so vermutet man — durch einen Paß getrennt, und über diesen wird man den Integrationsweg legen. Wir schreiben den Integranden als $e^{f(z)}$, setzen also

$$f(z) = n \operatorname{l} z + e^z;$$

dann muß der Paß eine Nullstelle von $f'(z) = n z^{-1} + e^z$, d. h. eine von 0 verschiedene Lösung der Gleichung (3) sein.

Wir beschränken uns von vornherein auf den Streifen $0<y<\pi$. Bei jedem reellen n muß am Paß der imaginäre Teil $e^x(x\sin y + y\cos y)$ von $z e^z$ verschwinden, d. h. der Paß liegt allemal auf der Kurve

$$x = -y \operatorname{ctg} y. \tag{9}$$

Sie beginnt bei $z=-1$ und führt über $z=\frac{1}{2}\pi i$ mit $y\to\pi$ nach rechts ins Unendliche. Auf ihr geht der Realteil von $z e^z$ stetig von $-e^{-1}$ nach $-\infty$ und zwar monoton; denn an einer Umkehrstelle müßte, da auf (9) der Imaginärteil den festen Wert 0 hat, die Ableitung von $z e^z$ verschwinden, und das tut sie nur bei $z=-1$. Wir finden also bei jedem $n>e^{-1}$ genau einen Paß im Streifen $0<y<\pi$; er heiße $z=p=\alpha+\beta i$. Damit ist zugleich gesagt, wie wir den bisher unbestimmten Wert β festlegen. Die Bedingung $\beta>\frac{1}{2}\pi$ ist dabei für $n>\frac{1}{2}\pi$ erfüllt. Dann führt der Weg H über p, sofern $\alpha \geqq \pi$ ist. Später werden wir noch verlangen, daß auch der Wert $p-n^{-2/5}$ auf H liegt, d. h. daß $\alpha - n^{-2/5} \geqq \pi$ ist. Auch dies ist für hinreichend große n der Fall, weil p mit wachsendem n nach rechts ins Unendliche rückt. Es genügt $n \geqq 120$, wie eine Überschlagsrechnung zeigt.

Um genauer zu ermitteln, wie sich p bei großem n verhält, setzen wir

$$p = (1+q)\,\mathfrak{l}(-n). \tag{10}$$

Von den Logarithmen gilt

$$\mathfrak{l}\,p - \mathfrak{ll}(-n) = \mathfrak{l}(1+q) \tag{11}$$

ohne Zusatz eines Vielfachen von $2\pi i$, weil der Imaginärteil der linken Seite zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{1}{2}\pi$ liegt. Da p die Gleichung (3) erfüllt, ist

$$p + \mathfrak{l}\,p = \mathfrak{l}(-n), \tag{12}$$

ebenfalls ohne Zusatz eines Vielfachen von $2\pi i$.

Wir schließen jetzt p in ein Rechteck ein. Ist $x \geqq \mathfrak{l}\,n$, so ist $|z\,e^z| \geqq n\,\mathfrak{l}\,n > n$. Ist aber $0 < y < \pi$, $0 < x \leqq \mathfrak{l}\,n - \mathfrak{ll}\,n$, so folgt

$$|z\,e^z| = |z|\,n/\mathfrak{l}\,n < (x+\pi)\,n/\mathfrak{l}\,n \leqq n - (\mathfrak{ll}\,n - \pi)\,n/\mathfrak{l}\,n \leqq n,$$

sobald $\mathfrak{ll}\,n \geqq \pi$ ist. Da aber p die Gleichung (3) erfüllt und daher $|p\,e^p| = n$ ist, gehört p bei hinreichend großem n dem Rechteck

$$\mathfrak{l}\,n - \mathfrak{ll}\,n < x < \mathfrak{l}\,n,\quad 0 < y < \pi$$

an. Nach (10) folgt daraus

$$|q| < \frac{\pi + \mathfrak{ll}\,n}{|\mathfrak{l}(-n)|} < \frac{\pi + \mathfrak{ll}\,n}{\mathfrak{l}\,n} \to 0 \qquad (n \to \infty). \tag{13}$$

Aus (10), (11) und (12) folgt

$$q\,\mathfrak{l}(-n) + \mathfrak{ll}(-n) + \mathfrak{l}(1+q) = 0.$$

Setzen wir in dieser Gleichung

$$u = -\mathfrak{ll}(-n)/\mathfrak{l}(-n),\quad v = -1/\mathfrak{l}(-n),$$

so schreibt sie sich

$$q = u + v\,\mathfrak{l}(1+q). \tag{14}$$

Da $\mathfrak{l}(1+q)$ bei $q = 0$ regulär ist, läßt sich (14) durch eine bei $u = v = 0$ reguläre Funktion von u und v auflösen. Genauer: es gibt einen Wert $r > 0$ derart, daß jede dem Bereich $|u| < r$, $|v| < r$, $|q| < r$ angehörende Lösung von (14) durch die Lagrangesche Umkehrreihe

$$\begin{aligned} q &= u + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v^k}{k!}\,\frac{d^{k-1}\,\mathfrak{l}(1+u)^k}{d\,u^{k-1}} \\ &= u + v\left(u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \cdots\right) + v^2\left(u - \frac{3\,u^2}{2} + \cdots\right) + v^3(u + \cdots) + \cdots \end{aligned} \tag{15}$$

dargestellt wird. Da u und v mit $n \to \infty$ gegen Null gehen — denn es ist ja $|\mathfrak{l}(-n)| > |\mathfrak{l}\,n|$ und $|\mathfrak{ll}(-n)| \leqq \pi + \mathfrak{l}(\pi + \mathfrak{l}\,n)$ — und von q nach (13) dasselbe gilt, wird also die durch (10) erklärte Größe q bei hinreichend großem n durch die Reihe (15) dargestellt. Wir können den Gültigkeitsbereich der Reihe (15) noch genauer angeben. Sie stellt

eine analytische Funktion von u und v, und damit von n dar, wenn n solche positiven Werte annimmt, daß das Wertpaar (u, v) dem Gebiet der absoluten Konvergenz der Doppelreihe (15) angehört. Da aber, wie wir im Anhang feststellen werden, für $n \geqq 1$ die Beträge $|u|$ und $|v|$ mit wachsendem n abnehmen, ist das von einer Stelle an, etwa für $n > n_0$ der Fall. Für $n > n_0$ stellt also die Reihe in (15) eine analytische Funktion von n dar, und ebenso ist q eine dort analytische Funktion von n. Für genügend große n stimmen beide überein; also stimmen sie als analytische Funktionen bei allen $n > n_0$ überein. Das genaue Gebiet der absoluten Konvergenz der Reihe wird ebenfalls im Anhang ermittelt werden.

Eine Entwicklung von p nach steigenden Potenzen von u und v bekommen wir, indem wir (15) in (10) einsetzen. Dabei ordnen wir gleich nach dem Gesamtgrad:

$$\begin{aligned} p &= \mathfrak{l}(-n) - q/v \\ &= \mathfrak{l}(-n) - u v^{-1} - u + (\tfrac{1}{2} u^2 - u v) + (-\tfrac{1}{3} u^3 + \tfrac{3}{2} u^2 v - u v^2) + \cdots . \end{aligned}$$

Um hieraus Real- und Imaginärteil von p kennen zu lernen, setzen wir ein

$$\begin{aligned} \mathfrak{l}(-n) &= \mathfrak{l} n + \pi i, \\ u v^{-1} &= \mathfrak{ll}(-n) = \mathfrak{ll} n + \mathfrak{l}(1 + \pi i/\mathfrak{l} n) = \\ &= \mathfrak{ll} n + \frac{\pi i}{\mathfrak{l} n} + \frac{\pi^2}{2\,\mathfrak{l} n^2} - \frac{\pi^3 i}{3\,\mathfrak{l} n^3} + \cdots, \\ v &= -\frac{1}{\mathfrak{l}(-n)} = -\frac{1}{\mathfrak{l} n} + \frac{\pi i}{\mathfrak{l} n^2} + \frac{\pi^2}{\mathfrak{l} n^3} + \cdots, \\ u &= u v^{-1} \cdot v = -\frac{\mathfrak{ll} n}{\mathfrak{l} n} + \pi i \frac{\mathfrak{ll} n}{\mathfrak{l} n^2} - \frac{\pi i}{\mathfrak{l} n^2} + \pi^2 \frac{\mathfrak{ll} n}{\mathfrak{l} n^3} - \frac{3\pi^2}{2\,\mathfrak{l} n^3} + \cdots, \\ \frac{1}{2} u^2 &= \frac{\mathfrak{ll} n^2}{2\,\mathfrak{l} n^2} - \pi i \frac{\mathfrak{ll} n^2}{\mathfrak{l} n^3} + \pi i \frac{\mathfrak{ll} n}{\mathfrak{l} n^3} + \cdots, \\ -u v &= -\frac{\mathfrak{ll} n}{\mathfrak{l} n^2} + 2\pi i \frac{\mathfrak{ll} n}{\mathfrak{l} n^3} - \frac{\pi i}{\mathfrak{l} n^3} + \cdots, \\ -\frac{1}{3} u^3 &= \frac{\mathfrak{ll} n^3}{3\,\mathfrak{l} n^3} + \cdots, \quad \frac{3}{2} u^2 v = -\frac{3\,\mathfrak{ll} n^2}{2\,\mathfrak{l} n^3} + \cdots, \quad -u v^2 = \frac{\mathfrak{ll} n}{\mathfrak{l} n^3} + \cdots \end{aligned}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} p &= \alpha + \beta i \\ &= \mathfrak{l} n - \mathfrak{ll} n + \frac{\mathfrak{ll} n}{\mathfrak{l} n} + \frac{1}{\mathfrak{l} n^2}\left(\frac{1}{2}\mathfrak{ll} n^2 - \mathfrak{ll} n - \frac{1}{2}\pi^2\right) + \\ &\quad + \frac{1}{\mathfrak{l} n^3}\left(\frac{1}{3}\mathfrak{ll} n^3 - \frac{3}{2}\mathfrak{ll} n^2 + (1 - \pi^2)\,\mathfrak{ll} n + \frac{3}{2}\pi^2\right) + \cdots \\ &\quad + \pi i\left[1 - \frac{1}{\mathfrak{l} n} + \frac{1}{\mathfrak{l} n^2}(-\mathfrak{ll} n + 1) + \frac{1}{\mathfrak{l} n^3}\left(-\mathfrak{ll} n^2 + 3\,\mathfrak{ll} n + \frac{1}{3}\pi^2 - 1\right) + \cdots\right]; \end{aligned}$$

das ist grade die Reihe (4) aus der Einleitung. Der Konvergenzbereich dieser Reihe ist weniger übersichtlich als der der nach Potenzen von

u und v fortschreitenden Reihen, umfaßt aber jedenfalls ein Gebiet ($|1/\mathrm{l}\, n| < r_1$, $|\mathrm{ll}\, n/\mathrm{l}\, n| < r_1$) mit $r_1 > 0$; denn wir haben ja nur für u und v die sie darstellenden konvergenten Potenzreihen ohne absolutes Glied eingesetzt, die nach Potenzen von $1/\mathrm{l}\, n$ und $\mathrm{ll}\, n/\mathrm{l}\, n$ fortschreiten.

§ 3.

Integralauswertung.

Wir haben jetzt das in (8) stehende Integral

$$H = \int_{\mathfrak{H}} z^n \exp(e^z)\, dz$$

asymptotisch auszuwerten. Um aber die in der Einleitung gemachten Aussagen über die Zeichenwechsel der Beiwerte c_n zu begründen, ziehen wir auch das Integral

$$H_1 = \int_{\mathfrak{H}} \mathrm{l}(z/p)\, z^n \exp(e^z)\, dz = d H_0/dn - \mathrm{l}\, p \cdot H_0$$

heran. Den Hauptbeitrag zu H_0 wird die Umgebung des Passes p liefern. Wir trennen daher eine Strecke der Länge $2a$ mit dem Mittelpunkt p von H ab und teilen überhaupt H in die folgenden gradlinigen Teile:

$$\begin{aligned} A &\text{ von } \pi \text{ bis } \pi + \beta i, \\ B^- &\text{ von } \pi + \beta i \text{ bis } p - a, \\ C &\text{ von } p - a \text{ bis } p + a, \\ B^+ &\text{ von } p + a \text{ bis } \beta i + \infty. \end{aligned}$$

Von vornherein wollen wir

$$0 < a \to 0 \qquad (n \to \infty) \tag{16}$$

annehmen; dann liegt bei genügend großem n der Teilpunkt $p - a$ sicher auf H. Die von den Teilen A bis B^+ herrührenden Beiträge zu den Integralen H_0 und H_1 bezeichnen wir mit A_0 bis B_0^+, A_1 bis B_1^+.

Für die Integrale A_0 und A_1 genügt eine grobe Schätzung. Auf A ist $\exp(e^z)$ beschränkt, $x = \pi$, $0 \leqq y < \pi$ und daher $|z| < \pi\sqrt{2}$. Da die Länge von A kleiner als π ist, haben wir

$$A = O((\pi\sqrt{2})^n). \tag{17}$$

Da auf A ferner $0 \leqq \arg z < \pi/4$, also $\mathrm{l}\, z$ beschränkt und $p \sim \mathrm{l}\, n$, $\mathrm{l}\, p \sim \mathrm{ll}\, n$ ist, wird

$$A_1 = O((\pi\sqrt{2})^n\, \mathrm{ll}\, n). \tag{18}$$

Für die anderen Integrale brauchen wir vor allem einige Kenntnis des Verhaltens der Funktion $f(z)$ und ihrer Ableitungen auf der Strecke C.

Es ist

$$f(z) = n \operatorname{l} z + e^z, \quad f'(z) = \frac{n}{z} + e^z, \quad f''(z) = -\frac{n}{z^2} + e^z, \quad f'''(z) = \frac{2n}{z^3} + e^z,$$

$$f'(p) = 0, \quad f''(p) = -\frac{n}{p^2} - \frac{n}{p} \sim -\frac{n}{\operatorname{l} n} \tag{19}$$

und daher auch

$$\operatorname{Re} f''(p) \sim -n/\operatorname{l} n. \tag{20}$$

Auf der ganzen Strecke C ist[2])

$$f'''(z) = \frac{2n}{z^3} + e^p e^{z-p} = O\left(\frac{n}{\operatorname{l} n^3}\right) - \frac{n}{p} O(1) = O\left(\frac{n}{\operatorname{l} n}\right). \tag{21}$$

Durch mehrfache Integration und mit Rücksicht auf die gleichmäßige Gültigkeit der O-Aussagen folgt daraus

$$f'(p \pm a) = \pm a f''(p) + O\left(\frac{a^2 n}{\operatorname{l} n}\right) \sim \mp \frac{an}{\operatorname{l} n}, \tag{22}$$

$$f(z) = f(p) + \tfrac{1}{2} f''(p)(z-p)^2 + O(a^3 n/\operatorname{l} n), \tag{23}$$

dies letzte natürlich nur für z auf C.

Jetzt können wir C_0 und C_1 abschätzen. Auf C ist

$$\exp(f(z) - f(p)) = \exp[\tfrac{1}{2} f''(p)(z-p)^2 + O(a^3 n/\operatorname{l} n)].$$

Setzen wir von jetzt an

$$a^3 n/\operatorname{l} n \to 0 \tag{24}$$

voraus, so erhalten wir

$$\exp(f(z) - f(p)) = \exp[\tfrac{1}{2} f''(p)(z-p)^2] + \exp[\tfrac{1}{2} \operatorname{Re} f''(p)(z-p)^2]\, O(a^3 n/\operatorname{l} n).$$

Setzen wir $z = p + t$ und integrieren wir von $-a$ bis a, so folgt

$$e^{-f(p)} C_0 = \int_{-a}^{a} \exp(\tfrac{1}{2} f''(p) t^2)\, dt + \int_{-a}^{a} \exp(\tfrac{1}{2} \operatorname{Re} f''(p) t^2)\, dt\, O(a^3 n/\operatorname{l} n). \tag{25}$$

Wegen (19) und (20) konvergieren bei großem n die beiden Integrale, wenn wir sie von $-\infty$ bis ∞ statt von $-a$ bis a erstrecken. Dabei wird das zweite, das einen positiven Integranden hat, vergrößert zu

$$\sqrt{-2\pi/\operatorname{Re} f''(p)} = O(\sqrt{\operatorname{l} n/n}).$$

Im ersten setzen wir

$$t \sqrt{-\tfrac{1}{2} f''(p)} = u$$

und erhalten, mit dem Faktor $\sqrt{-2/f''(p)}$ versehen, das Fehlerintegral

[2]) Alle Grenzwert- oder Beschränkungsaussagen, also Formeln mit den Zeichen O, o oder $\sim$ in denen von n unabhängige Veränderliche vorkommen, sollen gleichmäßig in diesen Veränderlichen gelten, natürlich soweit diese Werte aus den ihnen zugewiesenen, häufig von n abhängigen Bereichen annehmen, so wie hier z auf der von n abhängigen Strecke C beliebig ist.

$\int e^{-uu}\,du$, erstreckt von $-b$ bis b, worin $b = a\sqrt{-\frac{1}{2}f''(p)}$ gesetzt ist. Für die Quadratwurzel nehmen wir den Wert (oder einen der beiden Werte) mit nicht negativem Realteil. Nach (19) gilt dann

$$\operatorname{Re} b \to +\infty, \quad \arg b \to 0,$$

wenn wir an die Größe a die weitere Anforderung

$$a\sqrt{n/\ln n} \to \infty \tag{26}$$

stellen. Damit wird dann

$$\int_{-b}^{b} e^{-uu}\,du \to \sqrt{\pi},$$

$$\int_{-a}^{a} \exp\left(\tfrac{1}{2}f''(p)\,t^2\right)dt \sim \sqrt{-2\pi/f''(p)} \sim \sqrt{2\pi \ln n/n},$$

und aus (25) folgt

$$e^{-f(p)}C_0 = (1+o(1))\sqrt{2\pi \ln n/n} + O\left(\sqrt{\ln n/n}\right)O(a^3 n/\ln n) \sim \sqrt{2\pi \ln n/n}. \tag{27}$$

Zur Abschätzung von C_1 genügt es, die für alle z auf C gültige Beziehung

$$l(z/p) = O(a/|p|) = O(a/\ln n)$$

heranzuziehen; mit (20) ergibt sie

$$\begin{aligned} e^{-f(p)}C_1 &= O(a/\ln n)\int_{-a}^{a} \exp\left(\tfrac{1}{2}\operatorname{Re} f''(p)\,t^2\right)dt \\ &= O\left(\frac{a}{\ln n\sqrt{-\operatorname{Re} f''(p)}}\right) = O\left(\frac{a}{\sqrt{n\ln n}}\right). \end{aligned} \tag{28}$$

Auf den Strecken $B^{\pm}$ betrachten wir den Realteil von $f''(z)$. Es ist dort $x \geqq \pi > y$, $\cos y = \cos\beta < 0$; daraus folgt

$$\operatorname{Re} f''(z) = -n|z|^{-4}\operatorname{Re}(z^2) + e^x\cos\beta < 0.$$

Setzen wir

$$z = p \pm a \pm t, \quad \varphi(t) = \operatorname{Re} f(z), \quad b^+ = +\infty, \quad b^- = \alpha - a - \pi,$$

so durchläuft z die Strecke $B^{\pm}$, wenn t von 0 bis $b^{\pm}$ geht, und es ist

$$\varphi(0) = \operatorname{Re} f(p \pm a), \quad \varphi'(0) = \pm \operatorname{Re} f'(p \pm a), \quad \varphi''(t) = \operatorname{Re} f''(z) \leqq 0,$$
$$\varphi(t) \leqq \varphi(0) + t\varphi'(0) = \operatorname{Re} f(p \pm a) \pm t \operatorname{Re} f'(p \pm a).$$

(In jeder Formel ist durchweg das obere oder durchweg das untere Vorzeichen zu lesen.) Wegen (22) ist nun $\pm \operatorname{Re} f'(p \pm a) < 0$ bei hinreichend großem n und daher

$$\begin{aligned} |B_0^{\pm}| &\leqq \int_0^{b^{\pm}} e^{\varphi(t)}\,dt \leqq \int_0^{\infty} \exp\left(\varphi(0) + t\varphi'(0)\right)dt \\ &= \mp \exp\left(\operatorname{Re} f(p \pm a)\right)/\operatorname{Re} f'(p \pm a). \end{aligned} \tag{29}$$

Bei den Integralen B_1^+ kommt der Faktor $l(z/p)$ hinzu. Auf der Strecke B^- ist

$$1 < |z| \leqq p, \quad 0 < \arg z < \pi/4, \quad 0 < \arg p < \pi/4,$$
$$|l(z/p)| \leqq |l|z/p|| + |\arg(z/p)| < l|p| + \pi/4 = O(ll\, n);$$

das gibt

$$B_1^- = O(ll\, n) \exp(\operatorname{Re} f(p-a))/\operatorname{Re} f'(p-a). \tag{30}$$

Auf der Strecke B^+ ist $\operatorname{Re}(z/p) \geqq 1$, also $|w| \geqq 1$, wenn w die grade Strecke von 1 bis z/p durchläuft; auf B^+ gilt daher

$$|l(z/p)| = \left| \int_1^{z/p} w^{-1}\, dw \right| \leqq |z/p - 1| = (a+t)/|p|.$$

So bekommen wir

$$\begin{aligned} |B_1^+| &\leqq |p|^{-1} \exp \operatorname{Re} f(p+a) \int_0^\infty (a+t) \exp(t \operatorname{Re} f'(p+a))\, dt \\ &= |p|^{-1} \exp \operatorname{Re} f(p+a) \left(\frac{a}{-\operatorname{Re} f'(p+a)} + \frac{1}{(\operatorname{Re} f'(p+a))^2} \right). \end{aligned} \tag{31}$$

§ 4.

Schlußfolgerungen.

Aus den Ergebnissen (17), (18) und (27) bis (31) werden wir die in der Einleitung behaupteten Sätze ableiten. Zunächst können wir die in § 3 über a gemachten Voraussetzungen (16), (24) und (26) erfüllen, indem wir

$$a = n^{-2/5}$$

setzen. Dann vergleichen wir alle behandelten Integrale mit C_0. Dazu stellen wir fest

$$f(p) = n\, l\, p + e^p = n\, l(l\, n + O(ll\, n)) - n/p \sim n\, ll\, n.$$

Mit (27) zusammen gibt das

$$l|C_0| \sim n\, ll\, n. \tag{32}$$

Aus (17) und (18) entnehmen wir

$$l|A_\nu l\, n| < k\, n \qquad (\nu = 0, 1)$$

mit festem k, so daß sich

$$l|A_\nu l\, n/C_0| \to -\infty,$$
$$A_0 = o(C_0), \quad A_1 l\, n = o(C_0) \tag{33}$$

ergibt. Der Vergleich von (27) und (28) ergibt

$$C_1/C_0 = O(a/l\, n) = o(1/l\, n),$$
$$C_1 l\, n = o(C_0). \tag{34}$$

Um die Abschätzungen (29) bis (31) entsprechend auszuwerten, ziehen wir aus (22) die Folgerung

$$\mp f'(p \pm a) \sim n^{3/5}/\mathrm{l}\, n.$$

Sie zeigt, daß der Faktor, mit dem $\exp \mathrm{Re}\, f(p \pm a)$ in (29) bis (31) versehen ist, allemal mit $n \to \infty$ gegen Null geht, sogar wenn ihm noch ein Faktor $\mathrm{l}\, n$ hinzugesetzt wird. Es ist also

$$B_\nu^{\pm} \mathrm{l}\, n = o(\exp \mathrm{Re}\, f(p \pm a)). \tag{35}$$

Aus (23) folgt aber, wenn man (20) heranzieht,

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\, f(p \pm a) - \mathrm{Re}\, f(p) &= \tfrac{1}{2} a^2 \mathrm{Re}\, f''(p) + O(n^{-1/5}/\mathrm{l}\, n) \\ &= -(1 + o(1))\, n^{1/5}/2\,\mathrm{l}\, n + O(n^{-1/5}/\mathrm{l}\, n) \sim -n^{1/5}/2\,\mathrm{l}\, n. \end{aligned}$$

Bei genügend großem n ist also

$$\mathrm{Re}\, f(p \pm a) - \mathrm{Re}\, f(p) < -n^{1/5}/3\,\mathrm{l}\, n.$$

Mit (27) und (35) folgt daraus

$$\mathrm{l}\,|B_\nu^{\pm} \mathrm{l}\, n / C_0| < -n^{1/5}/3\,\mathrm{l}\, n + O(\mathrm{l}\, n) \to -\infty,$$

$$B_\nu^{\pm} \mathrm{l}\, n = o(C_0). \tag{36}$$

Nach der Zerlegung des Integrationsweges zu Anfang des § 3 ist

$$H_\nu = A_\nu + B_\nu^- + C_\nu + B_\nu^+ \qquad (\nu = 0, 1);$$

nach (33), (34) und (36) gilt daher

$$H_0 \sim C \sim e^{f(p)} \sqrt{2\pi\, \mathrm{l}\, n/n}, \tag{37}$$

$$H_1 \mathrm{l}\, n = o(C_0) = o(H_0). \tag{38}$$

Nun ist H_0 das Integral auf der rechten Seite von (8), und es ist

$$f(p) = n\,\mathrm{l}\, p + e^p = n\,\mathrm{l}\, p - n/p.$$

Setzen wir dies in (37) ein, so haben wir die Behauptung (4) der Einleitung. Die andere Behauptung, die über die Zeichenwechsel, folgt aus (38). Es ist ja

$$H_1 = \frac{d H_0}{d n} - H_0 \mathrm{l}\, p = o(H_0/\mathrm{l}\, n),$$

$$\begin{aligned} \frac{d \arg H_0}{d n} &= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{H_0} \frac{d H_0}{d n}\right) = \mathrm{Im}\,(\mathrm{l}\, p + H/H_0) \\ &= \mathrm{Im}\, \mathrm{l}\, p + o(1/\mathrm{l}\, n) \sim \pi/\mathrm{l}\, n, \end{aligned}$$

wobei der letzte Schritt ohne weiteres aus (5) folgt. Das Argument von H_0 wächst also über alle Grenzen und nimmt bei hinreichend großem n dauernd zu, aber beliebig langsam. Daraus folgt die Behauptung der Einleitung über die Zeichenwechsel der Folge (c_n).

Anhang.

Wie in § 2 angekündigt, wollen wir hier bestätigen, daß die Größen $|u|$ und $|v|$ mit wachsendem $n > 1$ monoton gegen Null streben. Dabei war

$$u = -\mathrm{ll}(-n)/\mathrm{l}(-n), \quad v = -1/\mathrm{l}(-n).$$

Bei v erkennt man sofort: mit $n \to \infty$ wächst $|\mathrm{l}(-n)|^2 = \mathrm{l}n^2 + \pi^2$ monoton ins Unendliche, nimmt also $|v|$ monoton gegen Null ab. Um bei u dasselbe zu erkennen, bilden wir

$$\begin{aligned} \mathrm{l}|u| &= \mathrm{Re}\,(\mathrm{lll}(-n) - \mathrm{ll}(-n)), \\ \frac{d\,\mathrm{l}|u|}{dn} &= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{n\,\mathrm{l}(-n)\,\mathrm{ll}(-n)} - \frac{1}{n\,\mathrm{l}(-n)}\right) \\ &= -\mathrm{Re}\,\frac{1-\mathrm{ll}(-n)^{-1}}{n\,\mathrm{l}(-n)} \sim \frac{-1}{n\,\mathrm{l}n}. \end{aligned} \tag{39}$$

Das Schlußglied ist die Ableitung von $-\mathrm{ll}\,n$; aus $-\mathrm{ll}\,n \to -\infty$ folgt daher $\mathrm{l}|u| \to -\infty$. Die Monotonie wird erwiesen, indem wir uns davon überzeugen, daß das vorletzte Glied in (39) für $n \geqq 1$ negativ ist, und dies wiederum ist gesichert, wenn wir sehen, daß Zähler und Nenner des Bruches beide in der rechten oberen Viertelebene liegen. Beim Nenner $n(\mathrm{l}n + \pi i)$ ist das klar. Um den Zähler zu behandeln, setzen wir für den Augenblick $\mathrm{ll}(-n) = \gamma + \delta i$; dann ist

$$\gamma = \mathrm{l}|\mathrm{l}(-n)| \geqq \mathrm{l}\pi > 1, \quad \delta = \arg \mathrm{l}(-n) > 0.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}\,(\mathrm{ll}(-n)^{-1}) = \frac{\gamma}{\gamma^2+\delta^2} < \frac{\gamma^2}{\gamma^2+\delta^2} < 1, \\ &\mathrm{Re}\,(1-\mathrm{ll}(-n)^{-1}) > 0, \\ &\mathrm{Im}\,(1-\mathrm{ll}(-n)^{-1}) = \frac{\delta}{\gamma^2+\delta^2} > 0, \end{aligned}$$

wie behauptet war.

Die zweite Aufgabe dieses Anhangs ist es, den genauen Bereich der (absoluten) Konvergenz der Doppelpotenzreihe (15) festzustellen. Dieser hat bekanntlich, abgesehen von Randpunkten, die Gestalt $|u| < \varphi(|v|)$, worin $\varphi(s)$ bei nicht negativem s der größte derjenigen Werte r ist, für die die durch (15) dargestellte Funktion in dem ganzen Doppelzylinder $|u| < r$, $|v| < s$ bzw. für $|u| < r$, $v = 0$ regulär ist.

Um die Profilfunktion $\varphi(s)$ zu ermitteln, greifen wir auf die Erklärung der Funktion $q(u, v)$ zurück. Setzen wir

$$F(q, u, v) = u + v\,\mathrm{l}(1+q) - q,$$

so ist q diejenige analytische Funktion von u und v, die im Nullpunkt regulär ist und den Wert 0 hat und die in ihrem ganzen Verlauf die

Gleichung $F = 0$ — gegebenenfalls mit einem anderen Wert des Logarithmus — erfüllt. Wir stellen zunächst fest, wie weit sie auf den Achsen $u = 0$ und $v = 0$ regulär ist. Für $u = 0$, $|v| < 1$ löst $q = 0$ die Gleichung $F = 0$, und es ist $F_q = v/(1+q) - 1 \neq 0$; also ist q dort regulär. Für $v = 1$, $q = u = 0$ dagegen ist $F_q = 0$, $F_u = 1 \neq 0$; also ist dort q singulär. Für $v = 0$ haben wir die Lösung $q = u$; und solange $|u| < 1$ bleibt, ist F regulär und $F_q \neq 0$, so daß wieder q regulär ist.

Weiter betrachten wir reelle Werte q, u und v. Die Gleichung $F = 0$ verlangt, in der reellen q-t-Ebene einen Schnittpunkt der Kurven

$$t = q - u, \quad t = v \,l(1+q)$$

zu finden. Ist $v \leqq 0$, so gibt es genau einen; ist $0 < v < 1$, so sind es genau zwei, solange u nicht unter den — negativen — Wert sinkt, bei dem Berührung zwischen den beiden Kurven eintritt. Der rechts gelegene geht für $u = 0$ in den Nullpunkt über. All das erkennt man sofort aus der Monotonie der beiden Kurven und der Konvexität der zweiten. Berührung tritt ein, wenn außer $F = 0$ noch

$$1 = \frac{d(q-u)}{dq} = \frac{d}{dq}\,(v\,l(1+q)) = \frac{v}{1+q}$$

gilt, d. h. wenn

$$-u = 1 - v - v\,l\,v = \psi(v)$$

ist. Dann fallen zwei Wurzeln der Gleichung $F = 0$ zusammen; die Funktion $q(u, v)$ verzweigt sich, ist also singulär. Die Funktion $\psi(v)$ nimmt stetig von 1 zu 0 ab, wenn v von 0 bis 1 geht. Wir fassen zusammen:

Die durch die Reihe (15) *dargestellte Funktion* $q(u, v)$ *ist regulär für* $0 \leqq v < 1$, $0 \leqq -u < \psi(v)$, *dagegen singulär bei den Stellen* $0 < v < 1$, $u = -\psi(v)$.

Von der Profilfunktion $\varphi(s)$ wissen wir hiernach das folgende. Weil q für $v = 0$, $|u| < 1$ regulär ist, ist $\varphi(0) \geqq 1$. Weil q regulär ist für $u = 0$, $|v| < 1$, aber nicht für $u = 0$, $v = 1$, ist $\varphi(s) > 0$ für $0 < s < 1$, aber $\varphi(1) = 0$. Ferner ist $\varphi(s) \leqq \psi(s)$, weil q für $v = s$, $u = -\psi(s)$ singulär ist. Schließlich weiß man allgemein, daß $l\,\varphi(s)$, soweit $\varphi > 0$ ist, eine nach oben konvexe nicht zunehmende Funktion von $l\,s$ ist. Aus all dem folgt, daß $\varphi(s)$ für $0 \leqq s \leqq 1$ eine abnehmende stetige Funktion ist. Nun sei $0 < s_0 < 1$; dann ist q jedenfalls regulär für $|u| < \varphi(s)$, $|v| < s$. Ist $|u| < \varphi(s_0)$, aber $|v| = s_0$, so wählen wir $s' > s_0$ so nahe bei s_0, daß noch $|u| < \varphi(s')$ gilt. Dann ist $|u| < \varphi(s')$, $|v| < s'$ und daher q an der Stelle (u, v) regulär. Ist $|u| = \varphi(s_0)$, $|v| < s_0$, so wählen wir s'' zwischen $|v|$ und s_0. Dann ist $|u| < \varphi(s'')$, $|v| < s''$ und daher wieder q an der Stelle (u, v) regulär. Damit erfüllt die Funktion $f(w, z) = -q(-w, z)$ die Voraussetzungen des Singularitätensatzes über

Potenzreihen mit positiven Beiwerten, den wir in der folgenden Form anwenden[3]):

Sei $r_0 > 0$, $s_0 > 0$. *Die Funktion* $f(w, z)$ *sei regulär, wenn die Ungleichungen* $|w| \leqq r_0$, $|z| \leqq s_0$ *gelten und in mindestens einer von ihnen die Gleichheit nicht besteht. Sie sei aber nicht in allen Punkten mit* $|w| = r_0$, $|z| = s_0$ *regulär. Die Beiwerte in ihrer Potenzreihe seien reell und nicht negativ. Dann ist* $w = r_0$, $z = s_0$ *ein singulärer Punkt für* $f(w, z)$.

In der Tat sieht man an (15), daß die Voraussetzung über die Beiwerte erfüllt ist; die anderen Voraussetzungen — mit $r_0 = \varphi(s_0)$ — waren grade bestätigt worden. Danach ist $u = -\varphi(s_0)$, $v = s_0$ eine singuläre Stelle für $q(u, v)$. Es muß daher $\varphi(s_0) \geqq \psi(s_0)$ sein. Da wir schon früher $\varphi(s_0) \leqq \psi(s_0)$ festgestellt haben, ist $\varphi(s_0) = \psi(s_0)$ für jedes s_0 zwischen 0 und 1. Unser Ergebnis ist daher:

Der Bereich der absoluten Konvergenz der Reihe (15) *besteht abgesehen von Randpunkten, aus den Punkten* (u, v) *mit*

$$|v| < 1, \quad |u| < 1 - |r' + r''| r|.$$

Eine Überschlagsrechnung zeigt, daß die Reihe (15) etwa für $n = 100$ konvergiert, allerdings noch nicht so schnell, daß sie zur Zahlenrechnung brauchbar wäre.

---

[3]) Bei Funktionen einer Veränderlichen ist dies der früher sogenannte Satz von Vivanti. Der hier ausgesprochene Satz wird genau so bewiesen. Nimmt man an, $f(w, z)$ sei regulär bei $z = r_0$, $w = s_0$ und setzt man $w = \frac{1}{2} r_0 + u$, $z = \frac{1}{2} s_0 + v$, so erhält man eine Funktion von u und v, die für $u \leqq \frac{1}{2} r_0$, $v \leqq \frac{1}{2} s_0$ regulär ist. Ihre Potenzreihe konvergiert daher bei geeignetem $\delta > 0$ für $u = \frac{1}{2} r_0 + \delta$, $v = \frac{1}{2} s_0 + \delta$. Sie entsteht aber aus der Potenzreihe für $f(w, z)$ durch Zerlegen der positiven Glieder in positive Teile und Zusammenfassen der Teile. Daher konvergiert die Reihe der Funktion $f(w, z)$ für $w = r_0 + \delta$, $z = s_0 + \delta$ und die Funktion $f(w, z)$ ist regulär für $|w| = r_0$, $|z| = s_0$, entgegen der Voraussetzung.

(Eingegangen am 6. Juli 1949.)

Über die Abzählung der Nullstellen der konfluenten hypergeometrischen Funktionen.

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag am 7. Mai 1950 gewidmet.

Von

F. G. Tricomi z. Zt. in Pasadena, California.

1. Eine der schönsten Formeln für die konfluente hypergeometrische Funktion

$$(1) \qquad {}_1F_1(a;\, c;\, x) \equiv \Phi(a,\, c;\, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{c(c+1)\dots(c+n-1)} \frac{x^n}{n!}$$

ist eine wohlbekannte asymptotische Formel von Herrn Perron[1]). Bei anderen Gelegenheiten[2]) habe ich gezeigt, wie diese Formel — oder genauer, eine asymptotische Entwicklung, deren erstes Glied der Perron'schen Formel äquivalent ist — nützliche Angaben über die Lage der reellen Nullstellen der Φ-Funktion liefert. Aber wieviele dieser Nullstellen gibt es?

Manche behaupten, daß solange a oder $c-a$ keine negativen ganzen Zahlen sind[3]), die Anzahl dieser Nullstellen unendlich sei, was für die reellen und komplexen Nullstellen zusammen im allgemeinen sicher zutrifft[4]), aber nicht für die reellen Nullstellen allein, wenigstens solange a und c beide reell sind, wie wir hier stets voraussetzen werden.

Freilich gibt es in der Literatur genügend Ansätze für eine lückenlose Abzählung der reellen Nullstellen von Φ, wie auch der reellen und sogar der komplexen Nullstellen der zweiten Lösung

$$(2) \qquad \Psi(a,\, c;\, x) = \frac{\Gamma(1-a)}{2\pi i}\, e^{-a\pi i} \int_{\infty e^{i\varphi}}^{(0+)} e^{-xt}\, t^{a-1}\, (1+t)^{c-a-1}\, dt,$$

$$\left(-\tfrac{\pi}{2} \leqq \varphi < \tfrac{\pi}{2}\right)$$

---

[1]) Journ. f. reine angew. Math. (Crelle) **151** (1921), 63—78.

[2]) Siehe insbesondere Annali di Matem. pura appl. (4) **26** (1947), 283—300.

[3]) In diesen Fällen reduziert sich bekanntlich die Funktion Φ auf ein Laguerre-sches Polynom.

[4]) Man beweist, daß solange keine der Zahlen a, c und $c-a$ eine nicht positive ganze Zahl ist, die Funktion Φ eine transzendente ganze Funktion von Rang und Geschlecht 1 ist.

der zugehörigen Differentialgleichung; aber meistens sind sie in einer so verzwickten Form dargestellt (und teilweise ohne jeden Beweis angegeben), daß sie öfters übersehen worden sind. Dabei ist zu bemerken, daß infolge der Gleichungen

$$(3)\quad \begin{cases} M_{\varkappa,\mu}(x) = e^{-x/2}\, x^{\mu+1/2}\, \Phi(a, c; x) \\ W_{\varkappa,\mu}(x) = e^{-x/2}\, x^{\mu+1/2}\, \Psi(a, c; x) \end{cases} \qquad (a = \mu - \varkappa + 1/2,\ c = 2\mu + 1)$$

das Studium der Nullstellen von Φ und Ψ im wesentlichen dasselbe ist wie das Studium der Nullstellen der WHITTAKER'schen Funktionen M und W. Das bescheidene Ziel dieser Mitteilung ist, zu zeigen wie

i) die erschöpfenden aber sehr kompliziert dargestellten Resultate von Herrn KIENAST[5]) über die reellen Nullstellen der Φ-Funktion durch eine passende graphische Darstellung einfach und elegant dargestellt werden können;

ii) die wichtigen aber (meines Wissens) bisher nicht geprüften Resultate von Herrn TSVETTKOFF[6]) über die Nullstellen der Ψ-Funktion bewiesen werden können, und sie auch graphisch darzustellen.

Bei der Redaktion eines Berichtes über die konfluente hypergeometrische Funktion für das „Bateman Manuscript Project" (ein vom *Office of Naval Research* der *USA* unterstütztes Unternehmen des California Institute of Technology) wurde meine Aufmerksamkeit auf diese Fragen gelenkt.

2. Wie schon gesagt, sind die Resultate der KIENAST'schen Abzählung der reellen Nullstellen von Φ in einer sehr komplizierten Form dargestellt (mehr als zwölf verschiedene Sätze!), aber die Mittel, mit denen sie erreicht werden können, sind verhältnismäßig einfach. Im Grunde reduziert sich alles auf die Tatsache, daß kraft der Rekursionsformel

$$(c - a)\, \Phi(a - 1, c; x) + (2a - c + x)\, \Phi(a, c; x) - a\, \Phi(a + 1, c; x) = 0,$$

die Funktionen

$$\Phi(a, c; x),\ \Phi(a + 1, c; x),\ \Phi(a + 2, c; x), \ldots$$

unter gewissen Bedingungen eine STURM'sche Kette bilden.

Ferner spielen bei der Bestimmung der Vorzeichen dieser Funktionen folgende Formeln

$$\Phi(a, c; 0) = 1,\ \Phi(a, c; x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\, e^x\, x^{a-c}\,[1 + O(1/x)], & (x > 0) \\ \dfrac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)}\,(-x)^{-a}\,[1 + O(1/x)], & (x < 0) \end{cases}$$

eine wichtige Rolle.

[5]) Denkschr. der Schweiz. Naturforsch. Gesell. **57** (1921), 247—325.

[6]) Comptes Rendus (Doklady) Acad. Sci. U. R. S. S. **32** (1941), 10—12 und **33** (1941), 290—291.

Hauptsächlich handelt es sich um die Bestimmung der Anzahl $p(a, c)$ der *positiven* Nullstellen von $\Phi(a, c; x)$, weil der KUMMER'schen Formel

$$\Phi(a, c; x) = e^x \Phi(c-a, c; -x)$$

zufolge die Anzahl $n(a, c)$ der *negativen* Nullstellen durch die einfache Formel

$$n(a, c) = p(c-a, c) \tag{4}$$

ermittelt werden kann.

Ist die diskontinuierliche Funktion $G(x)$ durch die Gleichungen

$$G(x) = 0, \quad (x \geqq 0); \qquad G(x) = -[x], \quad (x < 0) \tag{5}$$

erklärt, (wo, wie üblich, $[x]$ den *ganzen Teil* von x bedeutet), dann läßt sich, solange $c \geqq 0$, auch $p(a, c)$ durch eine sehr einfache Formel ausdrücken. Es ist nämlich

$$p(c, a) = G(a). \qquad (c \geqq 0) \tag{6}$$

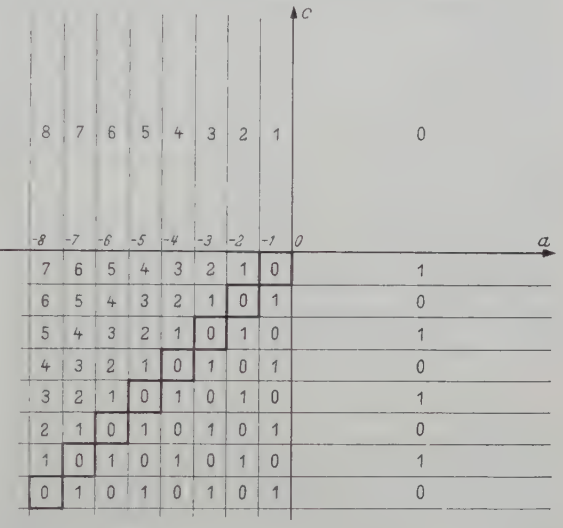

Fig. 1. Anzahl der positiven Nullstellen von $\Phi(a, c; x)$.

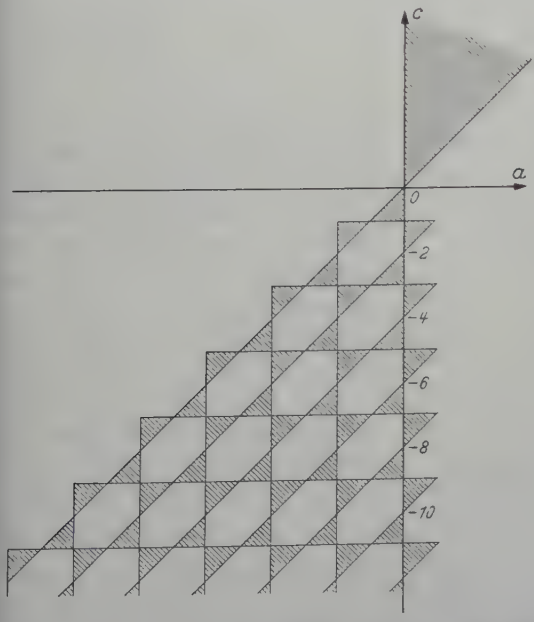

Fig. 2.
Gebiete, wo $\Phi(a, c; x)$ keine reelle Nullstelle besitzt.

Dagegen scheint es für $c < 0$ schwer zu sein, einen ähnlichen, nicht zu komplizierten Ausdruck für $p(a, c)$ zu finden. Aber die Funktion $p(a, c)$ kann lückenlos in einfacherer und eleganterer Weise graphisch dargestellt werden wie Fig. 1 zeigt. Dort geben die Zahlen die Anzahl der positiven Nullstellen in den verschiedenen Teilen der (a, c)-Ebene. Dazu ist nur noch hinzuzufügen, daß die *vertikalen* Grenzgeraden zu den Gebieten *rechts* von ihnen gehören.

Unter den zahlreichen Folgerungen wollen wir nur auf das eigenartige Bild von Fig. 2 hinweisen, wo die

schraffierten Gebiete der (a, c)-Ebene die sind, wo $\Phi(a, c; x)$ keine reelle Nullstelle besitzt.

3. In den beiden kurzen Mitteilungen des Herrn Tsvettkoff (welcher die Arbeit von Kienast nicht zu kennen scheint) werden zuerst die obigen Ergebnisse (in einer im Vergleich mit Kienast etwas einfacheren, aber immer noch komplizierten Form) wiedergefunden, aber dazu noch eine ganze Reihe von anderen interessanten Resultaten, auch über die Nullstellen von Ψ, d. h. von der Whittaker'schen Funktion W. Alles aber ohne Beweise [7]).

Unter anderem befinden sich darin (in leicht geänderter Form) folgende Ausdrücke für die Anzahlen $P(a, c)$ und $K(a, c)$ der *positiven* bzw. *komplexen* Nullstellen von $\Psi(a, c; x)$, wenn $c \geqq 1$:

$$P(a, c) = G(a), \tag{9}$$

$$K(a, c) = 2\left[\tfrac{1}{2}\{G(a-c+1) - G(a)\}\right], \qquad (c \geqq 1). \tag{10}$$

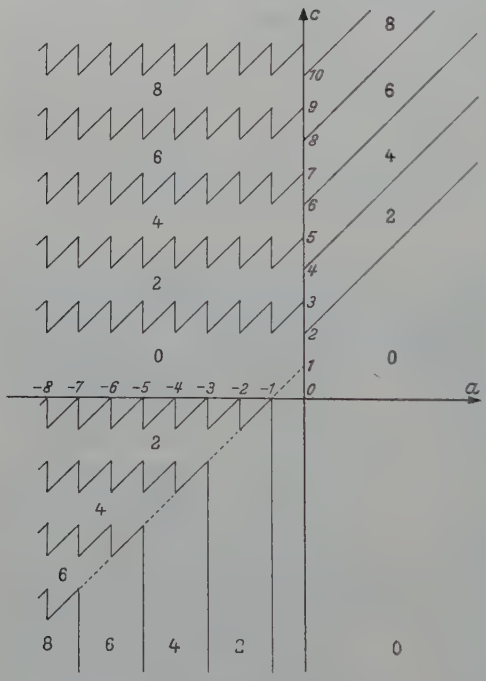

Fig. 3.
Anzahl der komplexen Nullstellen von $\Psi(a, c; z)$.

Dank der Grundgleichung

$$\Psi(a, c; x) = x^{1-c}\,\Psi(a-c+1, 2-c; x) \tag{11}$$

können wir hinzufügen, daß für $c \leqq 1$ gilt:

$$P(a, c) = G(a-c+1), \tag{9'}$$

$$K(a, c) = 2\left[\tfrac{1}{2}\{G(a) - G(a-c+1)\}\right], \qquad (c \leqq 1). \tag{10'}$$

Fig. 3 stellt die Resultate der Formeln (10)—(10') graphisch dar. Der Beweis von (9) ist sehr leicht. Im Grunde genügt es zu bemerken, daß (infolge der Rekursionsformel

$$\Psi(a-1, c; x) - (2a-c+x)\,\Psi(a, c; x) + a(a-c+1)\,\Psi(a+1, c; x) = 0$$

und der Tatsache, daß $\Psi(a, c; x)$ für $x > 0$ sicher *positiv* ist, wenn $a \geqq 0$, $c \geqq 1$ ist) für

$$n - 1 < -a \leqq n, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

[7]) Die positiven Nullstellen der W-Funktion waren schon in einer Arbeit aus dem Jahr 1915 von A. Milne (On the roots of the confluent hypergeometric function, Proc. Edinburgh Math. Soc. **33**, 48—64) abgezählt worden, wo die Resultate auch graphisch dargestellt sind.

die $n+1$ Funktionen

$$\Psi(a, c; x),\ \Psi(a+1, c; x), \ldots, \Psi(a+n, c; x)$$

eine STURM'sche Kette bilden. Außerdem benutzt man zur Bestimmung des Vorzeichens dieser Funktionen bei $x=0$ und $x \to +\infty$, die Formeln

$$(12)\quad \begin{cases} \Psi(a, c; x) = x^{-a}[1 + O(1/x)], & (x \to +\infty) \\ \lim\limits_{x \to +0} \Psi(a, c; x) = \dfrac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a-c+1)}, & (c < 1) \\ \lim\limits_{x \to +0} x^{c-1}\, \Psi(a, c; x) = \dfrac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)}. & (c > 1) \end{cases}$$

Für den weniger leichten Beweis von (10') (die Einschränkung auf den Fall $c \leqq 1$ ist wegen der Gleichung (11) zulässig) benutzt man die wohlbekannte Formel

$$2\pi N = [\arg f(z)]_C$$

wo N die Anzahl der innerhalb der geschlossenen Kurve C gelegenen Nullstellen der regulär-analytischen Funktion $f(z)$ bezeichnet, während das Symbol rechts die „gesamte Variation" des stetig fortgesetzten Argumentes von $f(z)$ bedeutet, wenn z die ganze Kurve C im positiven Sinne durchläuft. Genauer können wir in unserem Fall

$$(13)\quad 2\pi \tfrac{1}{2} K(a, c) = [\arg \Psi(a, c; z)]_{ABCDA}$$

schreiben, wo $ABCDA$ die in dem oberen Teil der Fig. 4 dargestellte geschlossene Kurve bedeutet, welche aus den beiden Halbkreisen AB und CD mit dem sehr großen bzw. sehr kleinen Radius ω und ε und aus den beiden Segmenten BC und DA des „oberen Randes" der reellen Achse[8]) zusammengesetzt ist.

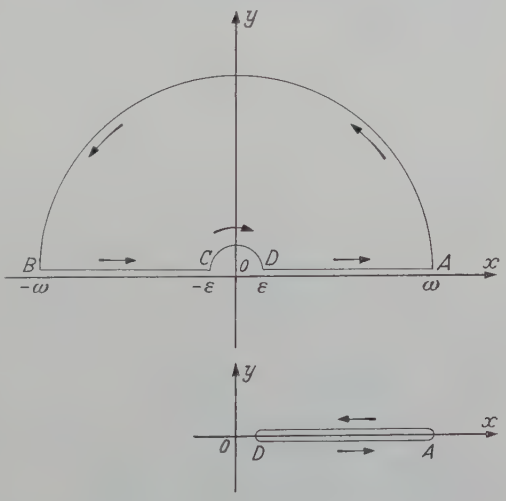

Fig. 4.

Aber wenn wir auch die andere, auf die Ränder der Strecke ADA zusammengezogene geschlossene Kurve des unteren Teiles der Fig. 4

[8]) Man beachte, daß die negative reelle Halbachse ein Schnitt der mehrdeutigen Funktion Ψ ist, während die positive Halbachse im allgemeinen eine Diskontinuitätslinie ihres Arguments darstellt.

betrachten, können wir andrerseits schreiben (mit selbstverständlichen Bezeichnungen), daß

$$\begin{aligned} 2\pi P(a, c) &= [\arg \Psi(a, c; x - i0)]_D^A - [\arg \Psi(a, c; x + i0)]_D^A \\ &= -2[\arg \Psi(a, c; x + i0)]_D^A \end{aligned}$$

ist, also die Gleichung (13) auch in der Form

$$\pi K(a, c) = [\arg \Psi(a, c; z)]_{ABCD} - \pi P(a, c)$$

geschrieben werden darf oder noch einfacher:

$$T(a, c) = \frac{1}{\pi} [\arg \Psi(a, c; z)]_{ABCD}, \tag{14}$$

wo $T = K + P$ die „totale" Anzahl der Nullstellen auf der entlang der negativen reellen Achse aufgeschnittenen z-Ebene (mit Ausschluß der Punkte $z = 0$ und $z = \infty$) bedeutet.

4. Um die Formel (14) zu verwerten, wollen wir nun die (nicht endgültige) Annahme machen, daß keine der Zahlen a, c und $c - a$ eine ganze Zahl sei, und *Null* als Anfangswert von $\psi = \arg \Psi(a, c; z)$ bei A annehmen.

Die früheren Formeln (12) bestimmen ohne weiteres das Grenzverhalten von ψ auf beiden Halbkreisen AB und CD für $\varepsilon \to 0$, $\omega \to \infty$. Es ist nämlich

$$\begin{cases} \psi = -a \arg z, & (0 \leqq \arg z \leqq \pi), \text{ (auf } AB) \\ \psi = h\pi, & \text{(auf } CD) \end{cases}$$

wo h eine passende (im Augenblick unbekannte) konstante ganze Zahl bedeutet.

Betreffs des Verhaltens von ψ auf der geradlinigen Strecke BC ist die Hauptsache, daß auf ihr ψ eine *monotone* Funktion von $z = -\xi + i0$ darstellt.

Die bekannte Grundrelation zwischen Φ und Ψ zeigt in der Tat, wenn c keine ganze Zahl ist, daß (für $\xi > 0$)

$$\begin{aligned} e^{\xi} \Psi(a, c; -\xi + i0) = \\ \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a-c+1)} \Phi(a, c; \xi) - \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)} \xi^{1-c} \Phi(1-a, 2-c; \xi)\, e^{-c\pi i} \end{aligned} \tag{15}$$

ist, und wenn wir zur Abkürzung

$$\frac{\xi^{1-c} \Phi(1-a, 2-c; \xi)}{\Phi(a, c; \xi)} = R(\xi)$$

setzen, haben wir infolgedessen

$$\tan \psi = \frac{\dfrac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)} R(\xi) \sin(c\pi)}{\dfrac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a-c+1)} + \dfrac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)} R(\xi) \cos(c\pi)} \tag{16}$$

woraus nach einer kurzen Zwischenrechnung folgt, daß

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{d\psi}{d\xi}\right) = \operatorname{sgn}[(c-1)\,\Gamma(a)\,\Gamma(a-c+1)]\cdot\operatorname{sgn}\left(\frac{dR}{d\xi}\right)$$

ist. Nach einer bekannten Formel über die WRONSKI'sche Determinante von zwei Lösungen der „konfluenten" Differentialgleichung haben wir aber

$$\frac{dR}{d\xi} = \frac{1-c}{[\Phi(e-a,\,c;\,\xi)]^2}\,e^{\xi}\,\xi^{-c};$$

also ist

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{d\psi}{d\xi}\right) = -\operatorname{sgn}[\Gamma(a)\,\Gamma(a-c+1)],\ (\text{auf } BC), \tag{17}$$

was das monotone Verhalten von ψ auf BC in Evidenz setzt.

Dabei kommt uns noch die Tatsache zu Hilfe, daß es nicht schwer ist, die Anzahl der „Touren" von ψ zu zählen, weil infolge von (15) ψ dann und nur dann ein Vielfaches von π durchläuft, wenn[9])

$$\Phi(1-a,\,2-c;\,\xi) = 0,$$

d. h. wenn ξ eine der $p(1-a,\,2-c)$ positiven Nullstellen von diesem Φ durchläuft, deren Anzahl, da $2-c>1$ ist, durch $G(1-a)$ gegeben ist.

Nun haben wir alle die Elemente zur Verfügung, die nötig sind, um das Verhalten von ψ auf der ganzen Strecke $ABCD$ zu beherrschen. So kommen wir bei Unterscheidung der folgenden drei[10]) Fälle

$$\text{(i) } a<0,\ \Gamma(a)\,\Gamma(a-c+1)>0;\quad \text{(ii) } a<0,\ \Gamma(a)\,\Gamma(a-c+1)<0;$$
$$\text{(iii) } a>0,\ \Gamma(a)\,\Gamma(a-c+1)>0$$

leicht auf die Endformeln

$$T(a,\,c) = \begin{cases} [-a]+G(1-a)+1, & \text{(i)} \\ [-a]-G(1-a), & \text{(ii)} \\ -[a]+G(1-a), & \text{(iii)}. \end{cases} \tag{18}$$

Am schnellsten zeigt eine graphische Diskussion, daß diese Formeln mit (10′) vollkommen äquivalent sind.

Zum Schluß wollen wir bemerken, daß aus selbstverständlichen Stetigkeitsgründen die ziemlich scharfe Einschränkung, daß keine der Zahlen a, c, $c-a$ eine ganze Zahl sein darf, durch die mildere ersetzt werden kann, daß der Punkt $(a,\,c)$ auf keiner der Grenzlinien der Fig. 3 liegen darf. Dies ist wirklich keine wesentliche Einschränkung, weil auf allen diesen Grenzlinien entweder a oder $a-c+1$ eine nicht positive ganze Zahl ist, und dann reduziert sich Ψ bekanntlich auf ein LAGUERRE'sches Polynom.

[9]) Man vergesse nicht, daß c keine ganze Zahl ist!

[10]) Da $1-c>0$ ist, ist der Fall $a>0$, $\Gamma(a)\,\Gamma(a-c+1)<0$ offenbar unmöglich.

(Eingegangen am 10. Oktober 1949).

Über
eine Verallgemeinerung des Dirichletschen Integrals.

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag am 7. Mai 1950 gewidmet.

Von

G. Szegö (Stanford University, Calif., USA.).

I. Einleitung.

1. Zahlreiche Fragen der mathematischen Physik führen auf das Problem, das Integral

$$\int\int \{|\text{grad } u|^2 + p(x, y)\, u^2\}\, dx\, dy \tag{1}$$

zu einem Minimum zu machen. Hierbei ist die Integration über einen gegebenen Bereich B der x, y-Ebene zu erstrecken, $p(x, y)$ ist eine in dem Bereiche B definierte feste Funktion und die zulässigen Funktionen u haben vorgeschriebene Werte auf dem Rande von B. Die entsprechende Euler-Lagrange'sche Differentialgleichung ist (siehe die Arbeiten von S. Bergmann und M. Schiffer, die in dem Literaturverzeichnis am Ende dieser Arbeit angeführt sind)

$$\Delta u = p(x, y)\, u. \tag{2}$$

Das klassische Dirichlet'sche Problem liegt vor, wenn $p(x, y) = 0$.

2. Der letztgenannte Spezialfall hängt in einer wohlbekannten Weise mit der Verteilung der Elektrizität auf einem zylindrischen Kondensator zusammen. Der Bereich B ist in diesem Falle ringförmig, d. h. er ist von zwei Kurven K_0 und K_1 begrenzt, wobei K_0 gänzlich innerhalb K_1 verläuft. Die Randwerte sind: $u = 0$ auf K_0 und $u = 1$ auf K_1. Wenn wir das Minimum von (1) mit $2\pi C$ bezeichnen, so heißt C die *Kapazität* des Kondensators. Wenn u die Lösung der Laplace'schen Differentialgleichung $\Delta u = 0$ in B unter den erwähnten Randbedingungen bedeutet, so kann C auch in der Form

$$-\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial u}{\partial n}\, ds \tag{3}$$

dargestellt werden, wobei die Integration über eine beliebige Kurve innerhalb von B erstreckt ist, welche K_0 gänzlich in ihrem Innern enthält (n ist die innere Normale).

Eine andere Interpretation von C ist die *Leitfähigkeit* einer die Wärme leitenden Platte, welche die Form von B hat.

3. Diese wichtige Konstante C ist vielfach studiert worden. Carleman (4) hat insbesondere gezeigt, daß für alle Kondensatoren, für welche die Begrenzungskurven K_0 und K_1 gegebene Flächeninhalte haben, die Kapazität C ein *Minimum* wird, wenn die Kurven K_0 und K_1 konzentrische Kreise (von dem gegebenen Inhalte) sind.

Der Beweis von Carleman stützt sich auf die konforme Abbildung, insbesondere auf die Tatsache, daß C eine konforme Invariante ist. Das Resultat stellt eine Erweiterung der Flächensätze der Theorie der konformen Abbildung dar. Andere Beweise beruhen auf der Idee der Symmetrisierung (vgl. Faber **5**, und in schärferer Form Pólya-Szegö **6**, **7**).

4. Das Ziel dieser Note ist, den Carleman'schen Satz in der Richtung des Dirichlet'schen Integrals (1) zu verallgemeinern. Wir betrachten einen interessanten Spezialfall von (1), nämlich den Fall, wo die gegebene Funktion $p(x, y)$ *kreissymmetrisch* ist, d. h. nur von dem Abstande r von einem festen Punkte im Innern von K_0 abhängt. Wir können annehmen, daß dieser Punkt der Anfangspunkt ist. Wir beweisen sodann das folgende Theorem:

Es sei B ein ringförmiger Bereich, berandet durch die beiden Kurven K_0 und K_1, wobei K_0 im Innern von K_1 verläuft. Außerdem soll K_0 den Anfangspunkt enthalten.

Es sei $r > 0$ der Abstand vom Anfangspunkte und $p(r)$ eine für alle $r > 0$ definierte monoton abnehmende Funktion, für welche das Integral von $r\,p(r)$ in einer Umgebung von $r = 0$ existiert. Wir bilden den verallgemeinerten Dirichlet'schen Ausdruck

$$D(u) = \int_B \int \{|\operatorname{grad} u|^2 + p(r)\,u^2\}\, d\sigma - \int_G \int p(r)\, d\sigma. \tag{4}$$

Das erste Integral ist über den Bereich B mit dem Flächenelement $d\sigma$ zwischen K_0 und K_1, das zweite über das ganze Innere G von K_1 zu erstrecken. Es sei $u = 0$ auf K_0 und $u = 1$ auf K_1.

Wir bezeichnen mit $2\pi C$ das Minimum des ersten Gliedes in $D(u)$ für alle u; d. h.

$$\min D(u) = 2\pi C - \int_G \int p(r)\, d\sigma. \tag{5}$$

Für alle Ringgebiete B, deren Begrenzungskurven K_0 und K_1 gegebene Inhalte haben, wird der Ausdruck (5) ein Minimum, wenn die Kurven K_0 und K_1 konzentrische Kreise um den Nullpunkt sind.

5. Wir bemerken, daß zu dem verallgemeinerten Dirichlet'schen Integral $D(u)$ dieselbe Euler-Lagrange'sche Differentialgleichung $\Delta u = p(r)u$ gehört, wie zu dem ersten Integral ohne das zusätzliche Glied. Es ist auch klar, daß im Falle $p(r) = \text{konst.}$ dieses Zusatzglied dem Inhalte von K proportional ist, somit für alle betrachteten Kondensatoren den selben Wert besitzt.

Eine andere Form unserer Behauptung ist die folgende: Wir bezeichnen mit u die Lösung der Gleichung $\Delta u = p(r)u$ in B, welche die Bedingungen $u = 0$ auf K_0 und $u = 1$ auf K_1 erfüllt. Wir betrachten die Größe

$$-\int_{K_1} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds - \int\int_G p(r)\, d\sigma, \tag{6}$$

wobei das erste Integral über K_1, das zweite über G zu erstrecken ist (n ist die innere Normale). Dieser Ausdruck (6) ist größer (nicht kleiner) als der entsprechende Ausdruck für den Kreiskondensator, dessen Kreise denselben Inhalt wie die Kurven K_0 und K_1 haben und deren Mittelpunkt im Anfangspunkte liegt.

II. Symmetrisierung.

1. Der Beweis des oben genannten Theorems beruht auf dem Vorgange der Symmetrisierung. (Vgl. Faber **5**, Pólya-Szegö **6**, **7**.) Dabei können wir $p(r) > 0$ voraussetzen. In der Tat wird dies der Fall, wenn zu $p(r)$ eine passende Konstante addiert wird; das Integral von $u^2 d\sigma$ über B erfährt aber keine Änderung durch Symmetrisierung.

Es sei u die minimisierende Funktion von $D(u)$, $u = 0$ auf K_0 und $u = 1$ auf K_1. Wir bezeichnen die Niveaumengen $u = \lambda$ mit K_λ und nehmen zunächst an, daß sie Jordankurven sind, die wie im Falle $\Delta u = 0$ verlaufen; d. h. $0 \leqq \lambda \leqq 1$ und K_λ ist in $K_{\lambda'}$ enthalten, wenn $\lambda < \lambda'$. Es sei $A(\lambda) = \pi\varrho^2$ der Inhalt von K_λ.

Wir „symmetrisieren" die vollständige Situation, d. h. die Schar K_λ und die Funktion u, in der folgenden Weise. Wir ersetzen K_λ durch den Kreis $\bar{K}_\lambda$ vom Radius ϱ um den Anfangspunkt und definieren $\bar{u}$ durch die Bedingung, daß $\bar{u} = \lambda$ auf dem Kreise $\bar{K}_\lambda$. Die Kurve K_λ und der Kreis $\bar{K}_\lambda$ begrenzen den gleichen Inhalt. Offenbar wird $\bar{u}$ eine zulässige Funktion in dem Kreisbereiche, dessen Berandungskurven die konzentrischen Kreise $\bar{K}_0$ und $\bar{K}_1$ sind.

Wir zeigen nun, daß bei dem geschilderten Vorgange der verallgemeinerte Dirichlet'sche Ausdruck $D(u)$ verkleinert (nicht vergrößert) wird.

2. Für das erste Glied

$$\int\int_B |\operatorname{grad} u|^2\, d\sigma \tag{1}$$

ist diese Behauptung mit dem Carleman'schen Satze identisch. Der Vollständigkeit halber wiederholen wir hier einen Beweis für diese Tatsache, die (statt der konformen Abbildung) auf der Idee der Symmetrisierung beruht. Wir zeigen, daß bei dem obigen Vorgange nicht nur das Integral (1), sondern sogar sein Element, das dem infinitesimalen Ring zwischen K_λ und $K_{\lambda+d\lambda}$ entspricht, verkleinert wird.

In der Tat kann das entsprechende Flächenelement in der Form $d\sigma = ds \cdot dn = ds \cdot \frac{d\lambda}{\operatorname{grad} u}$ geschrieben werden, wobei ds das Bogenelement von K_λ bedeutet und $d\lambda > 0$. Daher wird der Beitrag des genannten Ringgebietes gleich

$$d\lambda \int_{K_\lambda} |\operatorname{grad} u| \, ds. \tag{2}$$

Dies ist zu vergleichen mit

$$d\lambda \int_{K_\lambda} |\operatorname{grad} \bar{u}| \, ds = d\lambda \, . \, |\operatorname{grad} \bar{u}| \, . \, 2\pi\varrho. \tag{3}$$

Nun ist $|\operatorname{grad} \bar{u}| = \left| \frac{d\bar{u}}{d\varrho} \right| = \frac{d\lambda}{d\varrho}$, so daß (3) mit

$$d\lambda \cdot \frac{d\lambda}{d\varrho} \cdot 2\pi\varrho = d\lambda \cdot \frac{d\lambda}{d(\varrho^2)} \cdot 4\pi\varrho^2 = d\lambda \cdot \frac{4\pi A(\lambda)}{A'(\lambda)} \tag{4}$$

identisch ist. Nun haben wir für den Inhalt des Ringes $A(\lambda + d\lambda) - A(\lambda) = A'(\lambda)\, d\lambda$, oder

$$A'(\lambda)\, d\lambda = \int ds \, . \, dn = d\lambda \int_{K_\lambda} \frac{ds}{|\operatorname{grad} u|}. \tag{5}$$

Nach der Ungleichung von Schwarz ist dann

$$\int_{K_\lambda} \operatorname{grad} u \; ds \int_{K_\lambda} \frac{ds}{\operatorname{grad} u} \geqq \left(\int_{K_\lambda} ds \right)^2 = (L(\lambda))^2, \tag{6}$$

wobei $L(\lambda)$ die Länge von K_λ bezeichnet. Nach der isoperimetrischen Ungleichung $(L(\lambda))^2 \geqq 4\pi A(\lambda)$ ist also in der Tat

$$\int_{K_\lambda} |\operatorname{grad} u| \, ds \geqq \frac{4\pi A(\lambda)}{A'(\lambda)} = \int_{K_\lambda} |\operatorname{grad} u| \, ds. \tag{7}$$

III. Fortsetzung.

1. Wir kommen jetzt zu dem zweiten Teile von $D(u)$:

$$\int\int_B p(r)\, u^2 \, d\sigma - \int\int_G p(r)\, d\sigma, \tag{1}$$

der von der Funktion $p(r)$ abhängt. Unter der Voraussetzung $p(r) > 0$ ist diese Differenz negativ. Wir führen eine neue Funktion q ein, definiert durch die Bedingungen:

$$q'(\pi r^2) = p(r), \qquad q(0) = 0. \tag{2}$$

(Hier ist die Integrabilität von $rp(r)$ benutzt worden.) Dann ist q eine *von oben konvexe Funktion*. Wir nehmen zunächst an, daß sämtliche

Kurven K_λ, einschließlich K_0 und K_1, sternförmig in Bezug auf den Nullpunkt sind.

In dem zweiten Integral (1) benutzen wir Polarkoordinaten r, φ, in dem ersten die Koordinaten λ, φ, definiert durch

$$u = u(r, \varphi) = \lambda. \tag{3}$$

Es sei $r = r(\lambda, \varphi)$ die Gleichung von K_λ in Polarkoordinaten. Wir definieren die Funktion

$$Q(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} q\{\pi (r(\lambda, \varphi))^2\}\, d\varphi, \tag{4}$$

so daß

$$Q'(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} q'(\pi r^2)\, r\, r_\lambda\, d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} p(r)\, r\, r_\lambda\, d\varphi. \tag{5}$$

Nun ist, da $r_\lambda > 0$,

$$d\sigma = r\, dr\, d\varphi = r r_\lambda\, d\lambda\, d\varphi, \tag{6}$$

so daß der Ausdruck (1) in der folgenden Form geschrieben werden kann:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{\lambda=0}^{1} p(r)\, \lambda^2\, r\, r_\lambda\, d\lambda\, d\varphi - \int_{-\pi}^{\pi} \int_{r=0}^{r(1,\varphi)} p(r)\, r\, dr\, d\varphi. \tag{1'}$$

Mit Rücksicht auf

$$\int_{r=0}^{r(1,\varphi)} p(r)\, r\, dr = \int_{r=0}^{r(1,\varphi)} q'(\pi r^2)\, r\, dr = \frac{1}{2\pi} q\{\pi (r(1, \varphi))^2\}, \tag{7}$$

können wir (1) die folgende Form geben:

$$\int_0^1 \lambda^2\, Q'(\lambda)\, d\lambda - Q(1) = -2 \int_0^1 \lambda\, Q(\lambda)\, d\lambda. \tag{1''}$$

2. Die Gleichung des Kreises $\bar{K}_\lambda$ ist einfach $r = \varrho$, so daß wir für die Funktion $\bar{Q}(\lambda)$, welche der Funktion $Q(\lambda)$ in der symmetrisierten Situation entspricht, den folgenden Ausdruck erhalten:

$$\bar{Q}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} q(\pi \varrho^2)\, d\varphi = q(\pi \varrho^2) = q(A(\lambda)). \tag{8}$$

Nun können wir auf die konvexe Funktion q die Jensen'sche Ungleichung anwenden, $r = r(\lambda, \varphi)$:

$$\bar{Q}(\lambda) = q(A(\lambda)) = q\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \pi r^2\, d\varphi\right) \geqq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} q(\pi r^2)\, d\varphi = Q(\lambda). \tag{9}$$

Folglich

$$-2\int_0^1 \lambda\, Q(\lambda)\, d\lambda \geqq -2\int_0^1 \lambda\, \bar{Q}(\lambda)\, d\lambda. \tag{10}$$

Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Dieser Schluß zeigt, daß das zweite Integral in (1) durch Symmetrisierung vergrößert (nicht verkleinert) wird. In dem Spezialfalle, wo die äußere Kurve K_1 ein Kreis ist, haben wir $Q(1) = q(A(1)) = \bar{Q}(1)$, so daß das zweite Integral unverändert bleibt. In diesem Falle wird bereits das erste Glied in (1) verkleinert.

IV. Beseitigung der Einschränkungen.

1. Der obige Beweis beruht auf den folgenden beiden wesentlichen Einschränkungen:

a) Die Niveaumengen K_λ sind Jordan-Kurven, die wie im Falle $\Delta u = 0$ verlaufen.

b) Die Niveaukurven K_λ sind sternförmig in Bezug auf den Anfangspunkt.

Wir haben auch angenommen — und dies war eine unwesentliche Einschränkung — daß $p(r) > 0$ ist.

Die Minimalfunktion u genügt der Differentialgleichung I (2). Daraus folgt nach bekannten Resultaten[1]), daß $0 \leqq u \leqq 1$ in dem Ringbereiche B. Es ist jedoch denkbar, daß die Menge $u = \lambda$ aus mehreren Kurven $K'_\lambda, K''_\lambda, \ldots$ besteht; eine von diesen, etwa K'_λ, enthält K_0, während die anderen außerhalb von K'_λ und in dem ringförmigen Bereiche zwischen K'_λ und K_1 liegen. In dem Innern der letztgenannten Kurven gilt $u < \lambda$, so daß diese Kurven einander gegenseitig ausschließen müssen[2]).

2. Betrachten wir zunächst das Integral II (1). Die einzige Folge der in 1 beschriebenen allgemeinen Situation ist, daß wir die isoperimetrische Ungleichung auf ein System von gegenseitig sich ausschließenden Kurven anzuwenden haben. Wenn $L_1, L_2, \ldots$ die Längen und $A_1, A_2, \ldots$ die Inhalte der eingeschlossenen Bereiche bezeichnen, so haben wir

$$\begin{aligned} (L_1 + L_2 + \ldots)^2 &\geqq L_1^2 + L_2^2 + \ldots \\ &\geqq 4\pi A_1 + 4\pi A_2 + \ldots \\ &= 4\pi (A_1 + A_2 + \ldots) \end{aligned} \tag{1}$$

und dies liefert unsere Behauptung.

---

[1]) Wenn $p > 0$, so kann keine Lösung der Differentialgleichung $\Delta u - pu = 0$ in einem inneren Punkte ein positives Maximum oder ein negatives Minimum haben.

[2]) In der Tat, $\Delta u > 0$, d. h. u ist subharmonisch, so daß es in jedem Bereiche sein Maximum auf dem Rande annimmt. Daher gilt $u < \lambda$ zwischen K_0 und K'_λ und auch innerhalb von $K''_\lambda, K'''_\lambda, \ldots$.

3. Was nun den Ausdruck III (1) anbetrifft, so kann die Einschränkung bezüglich der Sternformigkeit von K_λ leicht aufgehoben werden. Wir nehmen zunächst an, daß die Menge $u = \lambda$ aus einer einzigen Kurve K_λ besteht. Im allgemeinen entspricht dann jedem Winkel φ eine *ungerade* Anzahl von Werten

$$r_1(\varphi) \leqq r_2(\varphi) \leqq \ldots \leqq r_{2m-1}(\varphi), \tag{2}$$

definiert durch die Punkte r, φ auf K_λ; die ganze Zahl $m = m(\varphi)$ ist streckenweise konstant. Wir verallgemeinern III (4) in der folgenden Weise:

$$Q(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{\mu=1}^{2m-1} (-1)^{\mu-1} q(\pi r_\mu^2)\, d\varphi, \tag{3}$$

so daß, da $\operatorname{sgn} \frac{\partial r_\mu}{\partial \lambda} = (-1)^{\mu-1}$,

$$Q'(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{\mu=1}^{2m-1} (-1)^{\mu-1} p(r_\mu)\, r_\mu \frac{\partial r_\mu}{\partial \lambda}\, d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{\mu=1}^{2m-1} p(r_\mu)\, r_\mu \left| \frac{\partial r_\mu}{\partial \lambda} \right| d\varphi \tag{4}$$

ist. Nun hat man $d\sigma = r\, dr\, d\varphi = r \left| \frac{\partial r}{\partial \lambda} \right| d\lambda\, d\varphi$, so daß wir für das erste Integral in III (1) wiederum den selben Ausdruck finden wie in III (1″).

Was das zweite Integral in III (1) anbetrifft, so haben wir jetzt statt III (7), $r_0 = 0$,

$$\sum_{\mu=1}^{m} \int_{r=r_{2\mu-2}}^{r=r_{2\mu-1}} p(r)\, r\, dr = \frac{1}{2\pi} \sum_{\mu=1}^{m} \left(q(\pi r_{2\mu-1}^2) - q(\pi r_{2\mu-2}^2) \right) \tag{5}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{\mu=1}^{2m-1} (-1)^{\mu-1} q(\pi r_\mu^2),$$

so daß wir für das zweite Integral in III (1) wieder $Q(1)$ erhalten. (Hier entsprechen r_μ und m dem Parameter $\lambda = 1$.)

Um dann III (1″) mit dem entsprechenden Ausdruck für den Kreiskondensator zu vergleichen, definieren wir $\bar{Q}(\lambda)$ wieder durch III (8). Wir haben jetzt

$$\bar{Q}(\lambda) = q(A(\lambda)) = q\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{\mu=1}^{m} (\pi r_{2\mu-1}^2 - \pi r_{2\mu-2}^2)\, d\varphi \right\}$$

$$\geqq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} q\left\{ \sum_{\mu=1}^{m} (\pi r_{2\mu-1}^2 - \pi r_{2\mu-2}^2) \right\} d\varphi \geqq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{\mu=1}^{2m-1} (-1)^{\mu-1} q(\pi r_\mu^2)\, d\varphi \tag{6}$$

$$= Q(\lambda).$$

Hier ist die folgende für eine beliebige, von oben konvexe Funktion gültige Ungleichung benutzt worden:

$$q\Big(\sum_{\mu=1}^{2m-1}(-1)^{\mu-1}a_\mu\Big) \geqq \sum_{\mu=1}^{2m-1}(-1)^{\mu-1}q(a_\mu), \tag{7}$$

$$0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{2m-1}.$$

Sie folgt z. B. durch Induktion. Wir halten die Länge des Intervalles a_{2m-2}, a_{2m-1} fest und verschieben es nach links, bis a_{2m-2} und a_{2m-3} zur Deckung gebracht werden. Bei diesem Vorgange nimmt die rechte Seite von (7) zu, während die linke sich nicht ändert. Das Resultat ist die (7) entsprechende Ungleichung, in der m durch $m-1$ ersetzt wird.

Damit ist das Theorem bewiesen.

4. Wir nehmen nun an, daß die Menge $u = \lambda$ aus zwei Kurven besteht. Die erste möge die Radien (2) definieren; der zweiten entsprechen gewisse Werte

$$s_1(\varphi) \leqq s_2(\varphi) \leqq \cdots \leqq s_{2n}(\varphi), \tag{8}$$

deren Anzahl *gerade* ist. Wir definieren sodann

$$Q(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big\{\sum_{\mu=1}^{2m-1}(-1)^{\mu-1}q(\pi r_\mu^2) + \sum_{\nu=1}^{2n}(-1)^\nu q(\pi s_\nu^2)\Big\}\,d\varphi, \tag{9}$$

$$Q'(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi}\Big\{\sum_{\mu=1}^{2m-1}p(r_\mu)r_\mu\Big|\frac{\partial r_\mu}{\partial\lambda}\Big| + \sum_{\nu=1}^{2n}p(s_\nu)s_\nu\Big|\frac{\partial s_\nu}{\partial\lambda}\Big|\Big\}\,d\varphi, \tag{10}$$

da $\operatorname{sgn}\frac{\partial s_\nu}{\partial\lambda} = (-1)^\nu$. Keine Änderung von (5) ist nötig und wir erhalten III (1″).

Nun finden wir

$$\bar{Q}(\lambda) = q(A(\lambda)) = q\Big\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big\{\sum_{\mu=1}^{m}(\pi r_{2\mu-1}^2 - \pi r_{2\mu-2}^2) + \sum_{\nu=1}^{n}(\pi s_{2\nu}^2 - \pi s_{2\nu-1}^2)\Big\}\,d\varphi\Big\}$$

$$\geqq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} q\Big\{\sum_{\mu=1}^{m}(\pi r_{2\mu-1}^2 - \pi r_{2\mu-2}^2) + \sum_{\nu=1}^{n}(\pi s_{2\nu}^2 - \pi s_{2\nu-1}^2)\Big\}\,d\varphi \tag{11}$$

$$\geqq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big\{\sum_{\mu=1}^{2m-1}(-1)^{\mu-1}q(\pi r_\mu^2) + \sum_{\nu=1}^{2n}(-1)^\nu q(\pi s_\nu^2)\Big\}\,d\varphi = Q(\lambda).$$

Wir benutzen hier die folgende Ungleichung:

$$q\Big(\sum_{\mu=1}^{2m-1}(-1)^{\mu-1}a_\mu + \sum_{\nu=1}^{2n}(-1)^\nu b_\nu\Big) \geqq \sum_{\mu=1}^{2m-1}(-1)^{\mu-1}q(a_\mu) + \sum_{\nu=1}^{2n}(-1)^\nu q(b_\nu), \tag{12}$$

wo die Größen a_μ und b_ν den folgenden Bedingungen unterworfen sind:

(1) $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{2m-1}$,
(2) $0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_{2n}$,
(3) jedes Intervall a_{2l-1}, a_{2l} (einschließlich a_{2m-1}, ∞) enthält eine gerade Anzahl von b_ν, während die Intervalle a_{2l}, a_{2l+1} kein b_ν enthalten.

Der Beweis ist einfach. Verschieben wir das Intervall b_{2k-1}, b_{2k} nach links, so daß es stets im Innern des Intervalles a_{2l-1}, a_{2l} bleibt, so wird die rechte Seite von (12) vergrößert. Folglich können wir voraussetzen, daß jedes Intervall a_{2l-1}, a_{2l} genau ein Intervall b_{2k-1}, b_{2k} (vielleicht der Länge 0) enthält und $a_{2l-1} = b_{2k-1}$ ist. Dies reduziert die Summe in dem Argument von q auf der linken Seite zu

$$b_2 - a_2 + b_4 - a_4 + \cdots + b_{2m-2} - a_{2m-2} + b_{2m}, \tag{13}$$

womit die Behauptung auf (7) zurückgeführt ist.

IV. Der Grundton einer inhomogenen Membrane.

1. Wir betrachten eine Membrane, deren Dichte eine kreissymmetrische Funktion ist. Die Randkurve dieser Membrane bezeichnen wir mit K und D sei das abgeschlossene Innere von K. Wir nehmen an, daß die Kurve K den Anfangspunkt enthält. Es sei $p(r)$ eine positive und monoton abnehmende Funktion, für welche $r\,p(r)$ in einer Umgebung des Anfangspunktes integrabel ist.

Wir betrachten alle Funktionen u, welche in D definiert sind und die Randbedingung $u = 0$ auf K erfüllen. Es sei λ^2 das Minimum von

$$\frac{\iint_D |\operatorname{grad} u|^2 \, d\sigma}{\iint_D p(r)\, u^2 \, d\sigma} \tag{1}$$

Die Größe λ, $\lambda > 0$, kann auch als der kleinste Eigenwert der Differentialgleichung

$$\Delta u + \lambda^2 u = 0 \tag{2}$$

unter der erwähnten Randbedingung definiert werden (Bergmann-Schiffer **1, 2, 3**).

Wir zeigen, daß *für alle Bereiche D vom gegebenen Flächeninhalt, die Größe λ ein Minimum wird, wenn D ein Kreis ist, dessen Mittelpunkt mit dem Anfangspunkte zusammenfällt.*

2. Zum Beweis betrachten wir wieder die minimisierende Funktion u (es sei $0 \leqq u \leqq 1$) und ihre Niveaukurven K_λ, $0 \leqq \lambda \leqq 1$, wobei jetzt $u = 1 - \lambda$ auf K_λ gilt. Folglich wird K_1 mit K und K_0 mit dem Maximumspunkte $u = 1$ identisch. Wir führen dann die Symmetrisierung in einer ähnlichen Weise durch wie in II. Dabei wird der Zähler von (1) sicherlich kleiner (nicht größer). Nun zeigen wir, daß der Nenner größer (nicht kleiner) wird.

Wir definieren die Größen $A(\lambda)$ und q wie früher. Weiter sei λ_0 der Wert von λ, der dem Anfangspunkt entspricht. Für $\lambda < \lambda_0$ haben wir sodann

$$Q(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (q(\pi r_1^2) - q(\pi r_2^2))\, d\varphi, \tag{3}$$

wobei $r_1(\lambda, \varphi)$ und $r_2(\lambda, \varphi)$ die Radien bezeichnen, welche K_λ definieren, $r_1 > r_2$. Für $\lambda > \lambda_0$ wird dagegen $Q(\lambda)$ von derselben Form sein wie in III (4). Wir machen hier die vereinfachende Voraussetzung, das K_λ aus einer einzigen Kurve besteht, die den fraglichen Radius in zwei Punkten oder in keinem Punkte trifft, wenn $\lambda < \lambda_0$ und in einem einzigen Punkte, wenn $\lambda > \lambda_0$. Die Berechnung von $\bar{Q}(\lambda)$ verursacht keine Schwierigkeit. Wir haben $A(0) = Q(0) = \bar{Q}(0) = 0$, und III (9) gilt wieder.

Nun ist

$$\begin{aligned} \iint_D p(r) u^2\, d\sigma &= \int_0^1 (1-\lambda)^2 Q'(\lambda)\, d\lambda \\ &= 2 \int_0^1 (1-\lambda) Q(\lambda)\, d\lambda \leqq 2 \int_0^1 (1-\lambda) \bar{Q}(\lambda)\, d\lambda, \end{aligned} \tag{4}$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Literaturverzeichnis.

S. Bergmann and M. Schiffer.

[1] A representation of Green's and Neumann's functions in the theory of partial differential equations of second order, Duke Mathematical Journal Bd. **14**, 1947, S. 609—638.

S. Bergmann and M. Schiffer.

[2] On Green's and Neumann's functions in the theory of partial differential equations. Bulletin of the American Math. Soc., Bd. **53**, 1947, S. 1141—1151.

S. Bergmann and M. Schiffer.

[3] Kernel functions in the theory of partial differential equations of elliptic type, Duke Mathematical Journal, Bd. **15**, 1948, S. 535—566.

T. Carleman.

[4] Über ein Minimalproblem der mathematischen Physik. Mathematische Zeitschrift, Bd. **1**, 1918, S. 208—212.

G. Faber.

[5] Beweis, daß unter allen homogenen Membranen von gleicher Fläche und gleicher Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundton gibt, Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie, 1923, S. 169—172.

G. Pólya and G. Szegö.

[6] Inequalities for the capacity of a condenser, American Journal of Math., Bd. **67**, 1945, S. 1—32.

G. Pólya and G. Szegö.

[7] Approximations and bounds for the electrostatic capacity and similar physical quantities; unter Veröffentlichung in den Memoirs of the American Math. Soc.

(Eingegangen am 27. November 1949.)

Über die Perioden regelmäßiger Kettenbrüche für Quadratwurzeln aus ganzen Zahlen.

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag am 7. Mai 1950 gewidmet.

Von

Rudolf Steuerwald in München.

§ 1.

Problemstellung.

Diese Arbeit befaßt sich mit einer Verallgemeinerung der Frage nach den kulminierenden und fastkulminierenden Perioden.

„Ganze Zahl" heißt hier: Ganze rationale Zahl. Alle lateinischen Buchstaben bedeuten ganze Zahlen.

Es sei D eine positive ganze Zahl, aber nicht das Quadrat einer solchen, und, in einen regelmäßigen Kettenbruch entwickelt,

$$(1) \qquad \xi_0 = \sqrt{D} = [b_0, \overline{b_1, \ldots, b_{r-1}, b_r, b_{r-1}, \ldots, b_1, 2b_0}].$$

Ferner seien

$$(2) \qquad \xi_\nu = \frac{\sqrt{D} + P_\nu}{Q_\nu} = [b_\nu, b_{\nu+1}, \ldots] \qquad (\nu = 0, 1, \ldots)$$

die vollständigen Quotienten des Kettenbruches (1), $A_{\mu,\nu}$ und $B_{\mu,\nu}$ der μ-te Näherungszähler und -Nenner von ξ_ν, außerdem $A_{-1,\nu} = B_{-2,\nu} = 1$, $A_{-2,\nu} = B_{-1,\nu} = 0$ und $A_{\mu,0} = A_\mu$, $B_{\mu,0} = B_\mu$. Die in (1) angeschriebene Periode von gerader Gliederzahl $2r$ braucht nicht primitiv zu sein.

Für $\nu = r$ gelten die Beziehungen

$$(3) \qquad 2P_r = b_r Q_r = 2(b_0 - c_r); \qquad Q_r \geqq 1,\ 0 \leqq c_r \leqq Q_r - 1.$$

Nun kann man umgekehrt drei ganze Zahlen r, Q, c vorgeben, welche den Bedingungen

$$(4) \qquad r \geqq 1, \qquad Q \geqq 1, \qquad 0 \leqq c \leqq Q - 1$$

genügen, und versuchen, positive ganze Zahlen b_ν ($\nu = 0, 1, \ldots, r$) und D so zu bestimmen, daß die Gleichungen (1) bis (3) mit $Q_r = Q$ und $c_r = c$ gelten. Diese Aufgabe ist im allgemeinen Fall genau so anzupacken wie in den geläufigen Fällen $Q = 1$ und $Q = 2$, die z. B. in dem Perron'schen Lehrbuch[1]) eingehend behandelt sind. Daher soll

[1]) O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, 2. Aufl. Leipzig und Berlin 1929 (künftig zitiert: P.), S. 96 ff. und S. 110 ff.

das Verfahren unter Verweisung auf die dortige Darstellung hier nur kurz skizziert werden.

Die Ausgangsgleichungen

$$2A_{r-1} = Q(b_r B_{r-1} + 2B_{r-2}), \qquad 2DB_{r-1} = Q(b_r A_{r-1} + 2A_{r-2})$$

ziehen die Gleichung

$$DB_{2r-1} = b_0 A_{2r-1} + A_{2r-2}$$

nach sich. Die Teilnenner $b_1 \ldots . b_{r-1}$ müssen der Gleichung

$$cA_{r-2,1} + B_{r-2,1} = QA_{r-3,1} \tag{5}$$

genügen. Es werde hiermit vereinbart, unter einer „Lösung" dieser Gleichung immer nur eine solche zu verstehen, welche aus positiven ganzen Zahlen $b_1, \ldots, b_{r-1}$ besteht.

Zu einer Lösung von (5) erhält man b_0 und D aus der diophantischen Gleichung

$$(D - b_0^2) A_{r-2,1} - (2b_0 - c) B_{r-2,1} = QB_{r-3,1}. \tag{6}$$

Mittels

$$A_{r-2,1} B_{r-3,1} - B_{r-2,1} A_{r-3,1} = (-1)^{r-1} \tag{7}$$

findet man als allgemeinste Lösung der Gl. (6)

$$2b_0 - c = (-1)^{r-1} QA_{r-3,1} B_{r-3,1} + mA_{r-2,1}, \tag{8}$$

$$D - b_0^2 = (-1)^{r-1} QB_{r-3,1} B_{r-3,1} + mB_{r-2,1}. \tag{9}$$

Für m ist jede ganze Zahl zulässig, die folgenden Bedingungen genügt:

1. m muß so groß sein, daß $b_0 > c$ wird. Das ist immer erfüllbar. Nach (6) wird dann auch $D > b_0^2$.

2. Es muß $2(b_0 - c)$ durch Q teilbar sein, also

$$mA_{r-2,1} \equiv c \pmod{Q}. \tag{10}$$

Auch das läßt sich immer erreichen. Denn da zufolge (7) $A_{r-2,1}$ und $B_{r-2,1}$ teilerfremd sind, folgt aus (5) das gleiche für $A_{r-2,1}$ und Q.

3. Die durch (8) bestimmte Zahl $2b_0$ muß gerade sein. Hier sind verschiedene Fälle zu unterscheiden.

I. Ist Q gerade, so ist (10) hinreichend.

II. Ist Q ungerade, so sind folgende zusätzliche Forderungen notwendig und hinreichend:

a) wenn $A_{r-3,1}$ gerade ist,

$$m \equiv c \pmod{2}; \tag{11a}$$

b) wenn $A_{r-3,1}$ und $A_{r-2,1}$ ungerade sind,

$$m \equiv 0 \pmod{2}; \tag{11b}$$

c) wenn $A_{r-2,1}$ gerade (also nach (7) $A_{r-3,1}$ ungerade) ist,

$$B_{r-3,1} \equiv c \pmod{2}. \tag{11c}$$

Damit nimmt der letzte Fall eine ausgesprochene Sonderstellung ein. Während durch (10), (11 a), (11 b) jede Lösung der Gl. (5) zugelassen und nur die Wahl von m in erfüllbarer Weise eingeengt wird, schließt (11 c) gewisse Lösungen ganz aus. Eine Lösung von (5), welche unter IIc fällt und der Bedingung (11 c) nicht genügt, heiße unbrauchbar, jede andere brauchbar. Daß es wirklich unbrauchbare Lösungen gibt, wird sich in § 2 zeigen.

Von den drei sich nunmehr abzeichnenden Aufgaben,

A) Bedingungen für die Lösbarkeit der Gl. (5),

B) Eigenschaften ihrer Lösungen,

C) Bedingungen für deren Brauchbarkeit

anzugeben, wird in der vorliegenden Arbeit C) nur gelegentlich gestreift. Zu A) wird sich ergeben, daß für $r \geqq 3$ jedenfalls dann Lösungen existieren, wenn $c = 0$ oder Teiler von $Q - 1$ ist. Den wesentlichen Inhalt bilden Aussagen zu B), vor allem in den eben genannten Sonderfällen.

§ 2.

Beispiele.

Ist $Q = 1$, so setzt sich die $2r$-gliedrige Periode aus einer geraden Anzahl primitiver Perioden zusammen, und (5) besagt einfach $b_\lambda = b_{r-\lambda}$ $(1 \leqq \lambda \leqq r-1)$. Dieser Fall bietet nichts Neues und werde daher künftig ausgeschlossen.

Für $Q \geqq 2$, was von jetzt ab immer vorausgesetzt wird, umfaßt die $2r$-gliedrige Periode eine ungerade Anzahl primitiver Perioden von gerader Gliederzahl.

Zwecks späterer Verwendung ist zunächst einiges über $r = 1, 2, 3, 4$ vorauszuschicken. Es lautet

für $r =$	Gleichung (5)	Kongruenz (11 c) (mod 2)
1	$c = 0$	$c \equiv 1$
2	$c b_1 + 1 = Q$	$c \equiv 0$
3	$c(b_1 b_2 + 1) + b_2 = Q b_1$	$c \equiv 1$
4	$c(b_1 b_2 b_3 + b_1 + b_3) + b_2 b_3 + 1 = Q(b_1 b_2 + 1)$	$c \equiv b_2$

$r = 1$: Die Menge $\{b_\nu\}$ $(0 < \nu < r)$ ist leer: Fall IIc kann nicht eintreten [2]).

$r = 2$: $c = 0$ führt auf $Q = 1$. $Q \geqq 2$ erfordert, daß $c > 0$ Teiler von $Q - 1$ sei, und liefert dann die Lösung $b_1 = \frac{Q-1}{c}$. Diese ist unbrauchbar, wenn $Q \equiv c \equiv 1 \pmod 2$ ist [3]).

[2]) Vgl. P. S. 99, 2. Beispiel.

[3]) Vgl. P. S. 100, 4. Beispiel. Die hiesigen Formeln gehen in die dortigen über, wenn man $Q = m b_1^2 - b_1 b_2 + 1$, $c = m b_1 - b_2$ setzt.

$r = 3$: a) $c = 0$ führt auf $b_2 = Q b_1$. Diese Lösung ist unbrauchbar, wenn $b_1 \equiv Q \equiv 1 \pmod 2$ ist.

b) Ist $c > 0$, so folgt aus (5) durch leichte Umformung

$$(Q - c b_2)(c b_1 + 1) = Q + c^2 .$$

Diese Gleichung ist dann und nur dann lösbar, wenn $Q + c^2$ einen Teiler $p > 1$ hat, der $\equiv 1 \pmod c$ ist. Sei $Q + c^2 = pq$: dann lautet die Lösung

$$b_1 = \frac{p-1}{c}, \qquad b_2 = \frac{Q-q}{c} = q b_1 - c .$$

Wegen $q = \frac{Q + c^2}{p} < \frac{Q + cQ}{c+1} = Q$ wird b_2 von selbst positiv. Unbrauchbar sind die Lösungen mit $b_1 \equiv b_2 \equiv Q \equiv c + 1 \equiv 1 \pmod 2$. Folgende Sonderfälle sind für später von Interesse:

$$p = Q + c^2, \qquad b_1 = \frac{Q-1}{c} + c, \qquad b_2 = \frac{Q-1}{c},$$

$$p = c + 1, \qquad b_1 = 1, \qquad b_2 = \frac{Q-c}{c+1} .$$

Das Beispiel $Q = 5$, $c = 1$ zeigt, daß diese beiden Lösungen gleichzeitig auftreten und brauchbar sein können.

$r = 4$: Hier sollen nur zwei Sonderfälle ohne Diskussion der Brauchbarkeit erwähnt werden.

a) $c = 0$ ergibt $b_2(b_3 - Q b_1) = Q - 1$.

Lösung: $$b_2 = \frac{Q-1}{c^*}, \qquad b_3 = Q b_1 + c^*,$$

wobei $b_1 > 0$ sein muß und c^* jeden positiven Teiler von $Q - 1$ bedeuten kann.

b) Ist $c > 0$ Teiler von $Q - 1$, so existieren Lösungen mit $b_3 = \frac{Q-1}{c}$. Unter dieser Annahme geht nämlich (5) über in

$$\left(b_1 - \frac{Q-1}{c}\right)(b_2 - c) = Q - 1;$$

und man erhält

$$b_1 = \frac{Q-1}{c} + c', \qquad b_2 = \frac{Q-1}{c'} + c,$$

wobei c' jeden positiven Teiler von $Q - 1$ bedeuten kann.

§ 3.

Hilfsformeln.

I. Von jetzt ab sollen die Lösungen der Gl. (5) ohne Rücksicht auf ihre Brauchbarkeit näher untersucht werden. Dazu sind zunächst einige Formeln bereitzustellen. Dabei ist es zweckmäßig, die bisher

aus Symmetriegründen geübte Bezeichnungsweise aufzugeben und anstatt $A_{\mu,\nu}$ $(\nu \geqq 1)$ durchweg $B_{\mu+1,\nu-1}$ zu schreiben. Dann lauten die „Fundamentalformeln“ [4]) in geeigneter Spezialisierung

$$B_{\mu,\nu} = b_{\mu+\nu} B_{\mu-1,\nu} + B_{\mu-2,\nu} \qquad (\mu \geqq 0), \tag{12}$$

$$B_{\mu,\nu} = b_{\nu+1} B_{\mu-1,\nu+1} + B_{\mu-2,\nu+2} \qquad (\mu \geqq 0). \tag{13}$$

Aus ihnen folgen für $\mu \geqq 0$ die Ungleichungen

$$B_{\mu,\nu} \geqq B_{\mu-1,\nu}, \qquad B_{\mu,\nu} \geqq B_{\mu-1,\nu+1}, \tag{14}$$

in denen dann und nur dann das Gleichheitszeichen gilt, wenn $\mu = b_{\nu+1} = 1$ ist.

Die Problemgleichung (5) lautet jetzt

$$c B_{r-1} + B_{r-2,1} - Q B_{r-2} = 0. \tag{15}$$

Sie wird noch in einigen anderen Gestalten benötigt. Durch Anwendung von (12) auf B_{r-1} und $B_{r-2,1}$, und mit Verwendung der Abkürzung

$$Q - c b_{r-1} = q \tag{16}$$

geht (15) über in

$$c B_{r-3} + b_{r-1} B_{r-3,1} + B_{r-4,1} - q B_{r-2} = 0 \qquad (r \geqq 2). \tag{17}$$

Wendet man hierin (13) auf B_{r-2} und B_{r-3} an, so erhält man

$$(b_{r-1} - q b_1) B_{r-3,1} + (c b_1 + 1) B_{r-4,1} + c B_{r-5,2} - q B_{r-4,2} = 0 \quad (r \geqq 3). \tag{18}$$

Wendet man aber (12) auf $B_{r-3,1}$ und B_{r-2} an, so folgt aus (17)

$$\begin{aligned} (c - q b_{r-2}) B_{r-3} + (b_{r-1} b_{r-2} + 1) B_{r-4,1} \\ + b_{r-1} B_{r-5,1} - q B_{r-4} = 0 \qquad (r \geqq 3). \end{aligned} \tag{19}$$

Endlich erhält man aus (18) durch Anwendung von (12) auf $B_{r-3,1}$ und $B_{r-4,2}$

$$\begin{aligned} (b_{r-1} b_{r-2} - q b_1 b_{r-2} + c b_1 + 1) B_{r-4,1} + (b_{r-1} - q b_1) B_{r-5,1} \\ + (c - q b_{r-2}) B_{r-5,2} - q B_{r-6,2} = 0 \qquad (r \geqq 4). \end{aligned} \tag{20}$$

Der Weg, der mittels der Fundamentalformeln von (15) zu (17) bis (20) führte, läßt sich aber auch in umgekehrter Richtung durchlaufen. Jede dieser Gleichungen ist also mit (15) gleichwertig, sofern nur r die jeweils angegebene Schranke nicht unterschreitet.

II. Nun seien $b_s, b_{s+1}, \ldots, b_{r-t-1}, b_{r-t}$ $(1 \leqq s \leqq r-t \leqq r-1)$ lückenlos aufeinanderfolgende Teilnenner des Kettenbruches (1). Mit der Abkürzung

$$r - t - s + 1 = h$$

werde

$$b_{\varkappa+s-1} = b'_\varkappa \ (\varkappa = 1, \ldots, h), \qquad b_{r-t+1-\lambda} = b^*_\lambda \ (\lambda = 1, \ldots, h)$$

[4]) P. S. 14, Gln. (24).

gesetzt; und $B'_{\mu,\nu}$ bzw. $B^*_{\mu,\nu}$ sollen für die Kettenbrüche

$$\xi'_0 = [0, b'_1, \ldots, b'_h] = [0, b_s, b_{s+1}, \ldots, b_{r-t}],$$
$$\xi^*_0 = [0, b^*_1, \ldots, b^*_h] = [0, b_{r-t}, b_{r-t-1}, \ldots, b_s]$$

die analoge Bedeutung haben wie $B_{\mu,\nu}$ für ξ_0. Dann gelten für $-2 \leqq \mu \leqq h$ die Gleichungen [5])

$$B_{\mu,\nu} = B'_{\mu,\nu-s+1} = B^*_{\mu,r-t-\mu-\nu} \qquad (s-1 \leqq \nu \leqq r-t-\mu). \tag{21}$$

§ 4.

Eigenschaften der Lösungen.

I. Definition 1. *Eine (verabredungsgemäß aus positiven ganzen Zahlen bestehende) Lösung $b_1, \ldots, b_{r-1}$ der Gl. (15) mit $r \geqq 2$, $Q \geqq 2$ heiße in dieser Anordnung (nach wachsenden Indizes) eine Q, c-Folge r-ter Ordnung, die Folge $b_{r-1}, \ldots, b_1$ (nach fallenden Indizes geordnet) deren Inverse. Dem Wert $r = 1$ werde eine „leere", zu sich selbst inverse Q, 0-Folge zugesprochen. Der Zusatz „r-ter Ordnung" unterbleibt, wo er evident ist.*

Definition 2. *Eine Q, c-Folge r-ter Ordnung, bei der $c > 0$ Teiler von $Q-1$, und $b_{r-1} = \frac{Q-1}{c}$ ist, heiße eine ausgezeichnete Q, c-Folge.*

Daß es, falls $c > 0$ ist, sowohl ausgezeichnete als auch andere Q, c-Folgen geben kann, zeigt das Beispiel $r = 3$ des § 2.

Hilfssatz. *Eine notwendige Bedingung für die Existenz von Q, c-Folgen ist $0 \leqq c \leqq Q-1$.*

(Daher wurde diese Bedingung in die Definition nicht aufgenommen.)

Beweis: Hat Gl. (15) eine Lösung, so folgt nach deren Einsetzen aus (14) $B_{r-1} \geqq B_{r-2}$, $B_{r-1} \geqq B_{r-2,1}$; und damit, da c eine ganze Zahl sein soll, aus (15) $0 \leqq c \leqq Q-1$. Für $r = 1$ ist $c = 0$.

Satz 1. *In jeder Q, c-Folge r-ter Ordnung ($r \geqq 2$) ist*

$$c\, b_{r-1} < Q < (c+1)(b_{r-1}+1),$$

also $$b_{r-1} \geqq Q, \quad \text{wenn} \quad c = 0,$$

und $$\frac{Q-c}{c+1} \leqq b_{r-1} \leqq \frac{Q-1}{c}, \quad \text{wenn} \quad c > 0.$$

Daß b_{r-1} alle angegebenen Schranken wirklich erreichen kann, zeigt das Beispiel $r = 3$ des § 2.

Beweis des Satzes: Nach Einsetzen der Lösung in (17) schließt man mittels (14) auf die Ungleichung

$$1 \leqq q \leqq c + b_{r-1}.$$

Daraus folgt durch Umformung mittels (16) die Behauptung.

---

[5]) Hier wird die durch $B_{\mu,\nu} = K(b_{1+\nu}, \ldots, b_{\mu+\nu}) = K(b_{\mu+\nu}, \ldots, b_{1+\nu})$ ausgedrückte Eigenschaft des Muirschen Symbols K verwendet.

Satz 2. *Ist* $r \geqq 3$, $c > 0$ *und* $b_1, \ldots, b_{r-2}, b_{r-1} = c^*$ *eine* Q, c*-Folge, so ist* $b_{r-2}, b_{r-3}, \ldots, b_1, c$ *eine* Q, c^**-Folge.*

Zusatz. *Der Satz gilt auch noch für* $r = 2$, *wenn man unter* $b_1, \ldots, b_{r-2}$ *die leere Folge versteht.*

Beweis: Setzt man

$$b_{r-1-\lambda} = b_\lambda^* \ (1 \leqq \lambda \leqq r-2), \qquad c = b_{r-1}^*, \qquad Q - c^* b_{r-1}^* = q^*,$$

so wird $q = q^*$. Außerdem ergibt Gl. (21) mit $t = 2$:

$$B_{r-3} = B_{r-3,1}^*, \quad B_{r-3,1} = B_{r-3}^*, \quad B_{r-4,1} = B_{r-4,1}^*, \quad B_{r-2} = B_{r-2}^*.$$

Setzt man dies alles in Gl. (17) ein, so erhält man

$$c^* B_{r-3}^* + b_{r-1}^* B_{r-3,1}^* + B_{r-4,1}^* - q^* B_{r-2}^* = 0.$$

Zufolge (17) ist also $b_1^*, \ldots, b_{r-1}^*$ eine Q, c^*-Folge. Der Zusatz ist hier, wie bei den folgenden Sätzen, aus § 2 abzulesen.

II. Satz 3. *Eine Folge* $b_1, \ldots, b_{r-1}$ $(r \geqq 4)$ *ist dann und nur dann eine* Q, 0*-Folge, wenn* $b_{r-2}, \ldots, b_2$ *eine* Q, c^**-Folge und* $b_{r-1} = Q b_1 + c^*$ *mit* $b_1 > 0$ *ist.*

Zusatz. *Der Satz gilt auch noch für* $r = 3$, *wenn man* $b_2, \ldots, b_{r-2}$ *als leere* Q, 0*-Folge deutet.*

Beweis: Es sei $b_1, \ldots, b_{r-1}$ eine Q, 0-Folge. Dann folgt aus (18)

$$(b_{r-1} - Q b_1) B_{r-3,1} + B_{r-4,1} - Q B_{r-4,2} = 0. \tag{22}$$

Setzt man

$$b_{r-1} - Q b_1 = c^*, \qquad b_{r-1-\lambda} = b_\lambda^* \ (1 \leqq \lambda \leqq r-3),$$

so folgt aus (21) mit $t = 2$

$$B_{r-3,1} = B_{r-3}^*, \qquad B_{r-4,1} = B_{r-4,1}^*, \qquad B_{r-4,2} = B_{r-4}^*,$$

und (22) geht über in

$$c^* B_{r-3}^* + B_{r-4,1}^* - Q B_{r-4}^* = 0. \tag{23}$$

Zufolge (15) ist also $b_1^*, \ldots, b_{r-3}^*$ eine Q, c^*-Folge. Die Umkehrung folgt daraus, daß der Übergang von (22) zu (23) reversibel ist und mit b_1 auch b_{r-1} positiv wird.

III. Der Hilfssatz und die Sätze 1 und 3 gelten sinngemäß auch noch für $Q = 1$. Dagegen konnte unter der Voraussetzung $c > 0$ ein Analogon zu Satz 3 nur für die ausgezeichneten Q, c-Folgen, nicht für die allgemeinsten, gefunden werden. Daher wird die weitere Untersuchung auf die ausgezeichneten Folgen beschränkt.

Satz 4. *In jeder ausgezeichneten* Q, c*-Folge* r*-ter Ordnung* $(r \geqq 3)$ *ist*

$$b_1 - b_{r-1} \geqq 0, \qquad b_{r-2} - c \geqq 0,$$
$$(b_1 - b_{r-1})(b_{r-2} - c) < Q < (b_1 - b_{r-1} + 1)(b_{r-2} - c + 1).$$

Insbesondere gilt also: Wenn von den beiden nicht negativen Differenzen $b_1 - b_{r-1}$, $b_{r-2} - c$ *die eine nicht verschwindet, ist die andere* $\leqq Q - 1$; *wenn die eine verschwindet, ist die andere* $\geqq Q$.

Beweis: Für $r = 3$ liest man den Satz aus §2 ab. Sei also $r \geqq 4$. Für eine ausgezeichnete Q, c-Folge gehen (18), (19), (20) über in

$$(24) \quad (b_{r-1} - b_1) B_{r-3,1} + (c b_1 + 1) B_{r-4,1} + c B_{r-5,2} - B_{r-4,2} = 0,$$

$$(25) \quad (c - b_{r-2}) B_{r-3} + (b_{r-1} b_{r-2} + 1) B_{r-4,1} + b_{r-1} B_{r-5,1} - B_{r-4} = 0,$$

$$(26) \quad [Q - (b_{r-1} - b_1)(c - b_{r-2})] B_{r-4,1} + (b_{r-1} - b_1) B_{r-5,1} + (c - b_{r-2}) B_{r-5,2} - B_{r-6,2} = 0.$$

Mittels (14) schließt man aus (24) und (25) auf die beiden ersten Ungleichungen des Satzes, und mit deren Benützung aus (26) auf die dritte.

Satz 5. *Eine Folge* $b_1, \ldots, b_{r-1} = \frac{Q-1}{c}$ $(r \geqq 5)$ *ist dann und nur dann eine ausgezeichnete* Q, c*-Folge, wenn* $b_2, \ldots, b_{r-3}, c^*$ *eine* Q, c'*-Folge oder* $b_{r-3}, \ldots, b_2, c'$ *eine* Q, c^**-Folge, und* $b_1 = b_{r-1} + c'$, $b_{r-2} = c + c^*$ *ist.*

Zusatz. *Der Satz gilt auch noch für* $r = 4$, *wenn man* $b_2, \ldots, b_{r-3}$ *als leere Folge deutet, und liefert dann die Bedingung* $c' c^* = Q - 1$ *(vgl. §2).*

Anmerkung. Von den beiden Bedingungen des Satzes 5 kommt, falls $c' = 0$, nur die erste; falls $c^* = 0$, nur die zweite in Frage. Ist $c' > 0$ und $c^* > 0$, so sind sie nach Satz 2 äquivalent; $c' = c^* = 0$ ist durch Satz 4 ausgeschlossen.

Beweis des Satzes: Es sei $b_1, \ldots, b_{r-1}$ eine ausgezeichnete Q, c-Folge und $b_1 - b_{r-1} = c'$, $b_{r-2} - c = c^*$.

a) Ist $c^* > 0$, so werde gesetzt

$$b_{\varkappa+1} = b'_\varkappa \; (1 \leqq \varkappa \leqq r-4), \qquad c^* = b'_{r-3}, \qquad Q - c' b'_{r-3} = q'.$$

Dann folgt aus (21) mit $s = 2$

$$B_{r-4,1} = B'_{r-4}, \quad B_{r-5,1} = B'_{r-5}, \quad B_{r-5,2} = B'_{r-5,1}, \quad B_{r-6,2} = B'_{r-6,1}.$$

Setzt man das alles in (26) ein, so erhält man

$$(27) \qquad c' B'_{r-5} + b'_{r-3} B'_{r-5,1} + B'_{r-6,1} - q' B'_{r-4} = 0.$$

Zufolge (17) ist also $b'_1, \ldots, b'_{r-3}$ eine Q, c'-Folge.

b) Ist $c' > 0$, so werde gesetzt

$$b_{r-2-\lambda} = b^*_\lambda \; (1 \leqq \lambda \leqq r-4), \qquad c' = b^*_{r-3}, \qquad Q - c^* b^*_{r-3} = q^*.$$

Dann ergibt (21) mit $t = 3$

$$B_{r-4,1} = B^*_{r-4}, \quad B_{r-5,1} = B^*_{r-5,1}, \quad B_{r-5,2} = B^*_{r-5}, \quad B_{r-6,2} = B^*_{r-6,1},$$

und (26) geht über in

$$(28) \qquad c^* B^*_{r-5} + b^*_{r-3} B^*_{r-5,1} + B^*_{r-6,1} - q^* B^*_{r-4} = 0.$$

Zufolge (17) ist also $b^*_1, \ldots, b^*_{r-3}$ eine Q, c^*-Folge.

Wegen Satz 4 ist mindestens eine der Voraussetzungen a), b) erfüllt.

Daß die hiermit als notwendig erwiesenen Bedingungen auch hinreichend sind, folgt wieder daraus, daß der Übergang von (26) zu (27) und (28) umkehrbar ist.

IV. Die Sätze 3 und 5 erlauben, für $r \geqq 3$ zu jedem Q wirklich Q, 0-Folgen und ausgezeichnete Q, c-Folgen anzugeben. Zur Erzeugung von Q, 0-Folgen kann man z. B. Satz 3 mit $c^* = 0$ wiederholt anwenden. Geht man dabei von der leeren Q, 0-Folge ($r = 1$) aus, so ergibt sich

r	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
3	b_1	Qb_1				
5	b_1	Qb_3	b_3	Qb_1		
7	b_1	Qb_5	b_3	Qb_3	b_5	Qb_1

usw. Geht man aber von $r = 2$ mit einem beliebigen Teiler $c > 0$ von $Q - 1$ aus, so erhält man

r	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
4	b_1	$\frac{Q-1}{c}$	$Qb_1 + c$				
6	b_1	$Qb_4 + c$	$\frac{Q-1}{c}$	b_4	Qb_1		
8	b_1	Qb_6	b_3	$\frac{Q-1}{c}$	$Qb_3 + c$	b_6	Qb_1

usw. In ähnlicher Weise kann man ausgezeichnete Q, c-Folgen konstruieren. So ergibt z. B. wiederholte Anwendung von Satz 5 mit $c' = c$ für $r \geqq 3$ die Folge

$$b_1 = \cdots = b_{r-2} = \frac{Q-1}{c} + c, \qquad b_{r-1} = \frac{Q-1}{c},$$

von der man leicht nachweist, daß sie dann und nur dann unbrauchbar ist, wenn bei ungeradem Q

entweder $r \equiv 2 \pmod 3$ und c ungerade,

oder $r \equiv 0 \pmod 3$, c gerade und $\frac{Q-1}{c}$ ungerade ist.

Ihr entspricht wieder nach Satz 3 für $r \geqq 5$ die Q, 0-Folge

$$b_1, \quad b_2 = \frac{Q-1}{c}, \quad b_3 = \cdots = b_{r-2} = \frac{Q-1}{c} + c, \quad b_{r-1} = Qb_1 + c.$$

Andererseits erlauben die gewonnenen Sätze nicht, die Gesamtheit der Q, c-Folgen zu überblicken, außer im Falle $Q = 2$, der daher jetzt noch behandelt werden soll.

§ 5.

Der Fall $Q = 2$.

Mit $Q = 2$ ergibt $c = 0$ die kulminierenden, $c = 1$ die fastkulminierenden Perioden, letztere unter Ausschluß von $D = 8, 12$. Daher möge kurz jede 2, 0-Folge als k-Folge, jede 2, 1-Folge als f-Folge bezeichnet werden. Dann nehmen die Sätze des § 4 folgende spezielle Form an.

Satz 1*. *In jeder k-Folge r-ter Ordnung ist* $b_{r-1} \geqq 2$. *In jeder f-Folge r-ter Ordnung ist* $b_{r-1} = 1$.

Satz 2*. *Ist* $b_1, \ldots, b_{r-2}, 1$ *eine f-Folge, dann ist auch* $b_{r-2}, \ldots, b_1, 1$ *eine solche.*

Satz 3*. *Für* $r = 2$ *existiert keine, für* $r = 1$ *nur die leere k-Folge. Für* $r \geqq 3$ *ist* $b_1, \ldots, b_{r-1}$ *dann und nur dann eine k-Folge, wenn*

a) *entweder* $b_{r-1} = 2b_1$ *und* $b_{r-2}, \ldots, b_2$ *eine k-Folge*[6])

b) *oder* $r \geqq 4$, $b_{r-1} = 2b_1 + 1$ *und* $b_{r-2}, \ldots, b_2$ *eine f-Folge ist.*

Je nachdem Fall a) oder b) vorliegt, heiße die k-Folge eine solche erster oder zweiter Art.

Satz 4*. *In jeder f-Folge r-ter Ordnung* ($r \geqq 3$) *ist*

$$(b_1 - 1)(b_{r-2} - 1) \leqq 1, \qquad b_1 b_{r-2} \geqq 3,$$

also entweder $b_1 = b_{r-2} = 2$

oder $b_1 = 1, \quad b_{r-2} > 2$

oder $b_1 > 2, \quad b_{r-2} = 1$.

Satz 5*. *Für* $r = 1$ *existiert keine f-Folge, für* $r = 2$ *nur die eine* $b_1 = 1$. *Für* $r \geqq 3$ *gilt: Eine Folge* $b_1, \ldots, b_{r-2}, 1$ *ist dann und nur dann eine f-Folge, wenn*

a) *entweder* $b_1 = b_{r-2} = 2$ *und (falls* $r > 3$*)* $b_2, \ldots, b_{r-3}, 1$ *(also nach Satz 2* auch* $b_{r-3}, \ldots, b_2, 1$*) eine f-Folge*[7])

b) *oder* $r \geqq 5$, $b_1 = 1$ *und* $b_2, \ldots, b_{r-3}, b_{r-2} - 1$ *eine k-Folge*

c) *oder* $r \geqq 5$, $b_{r-2} = 1$ *und* $b_{r-3}, \ldots, b_2, b_1 - 1$ *eine k-Folge ist.*

Je nachdem Fall a), b) oder c) vorliegt, möge die f-Folge eine solche erster, zweiter oder dritter Art heißen. Außerdem werde die aus einer f-Folge durch Weglassung von $b_{r-1} = 1$ entstehende Folge eine f-Kurzfolge genannt. Dann liegt nach dem Vorangehenden folgender Sachverhalt vor:

Die Inverse einer f-Kurzfolge ist auch eine f-Kurzfolge. Für $r = 1$ existiert keine, für $r = 2$ nur die leere f-Kurzfolge. Ist $r \geqq 3$, so gibt es unter den f-Kurzfolgen 1. Art genau eine symmetrische (d. h. mit ihrer Inversen identische), nämlich die aus lauter Zweiern bestehende. Ist $r \geqq 5$, so kommen dazu noch Paare unsymmetrischer, aber gegenseitig inverser Kurzfolgen 1. Art. Die Kurzfolgen 2. und 3. Art sind durchwegs unsymmetrisch. Die Kurzfolgen 3. Art sind gerade die Inversen der Kurzfolgen 2. Art.

[6]) Für $r = 3$ ist $b_{r-2}, \ldots, b_2$ als leere Folge zu deuten.

[7]) Für $r = 4$ ist $b_2, \ldots, b_{r-3}$ als leere Folge zu deuten.

§ 6.

k- und *f*-Klassen.

Durch die Bedingungen a), b) des Satzes 3* und a), b), c) des Satzes 5* wird jede k- und f-Folge r-ter Ordnung zu genau einer k- oder f-Folge $(r-2)$-ter Ordnung in Beziehung gesetzt. Diese letztere möge jeweils kurz als die Erzeugende der ersteren bezeichnet werden.

Dieser Zusammenhang läßt sich folgendermaßen ausnützen, um die k-Folgen und die f-Folgen in Klassen einzuteilen: Unter der Annahme, daß für die k- und f-Folgen $(r-2)$-ter Ordnung schon eine Klasseneinteilung vorliege, werde eine k-Klasse r-ter Ordnung definiert als Gesamtheit der k-Folgen r-ter Ordnung gleicher Art, deren Erzeugende zur nämlichen k- bzw. f-Klasse $(r-2)$-ter Ordnung gehören; analog eine f-Klasse r-ter Ordnung. Diese Rekursion funktioniert, weil für $r=1$ nur eine (die leere) k-Folge, für $r=2$ und $r=3$ nur je eine f-Folge, also auch nur je eine Klasse existiert.

Auch die Anzahlen $n_k(r)$ der k-Klassen und $n_f(r)$ der f-Klassen r-ter Ordnung lassen sich leicht angeben. Man verifiziert zunächst direkt

$$n_k(1)=1, \qquad n_k(2)=0, \qquad n_f(1)=0, \qquad n_f(2)=n_f(3)=n_f(4)=1.$$

Aus Satz 3* und Satz 5* folgt

für $r \geqq 3$: $\quad n_k(r)=n_k(r-2)+n_f(r-2)$,

für $r \geqq 5$: $\quad n_f(r)=n_f(r-2)+2\,n_k(r-2)$.

Daraus ergibt sich für $r \geqq 6$

$$n_k(r)=2\,n_k(r-2)+n_k(r-4), \quad n_f(r)=2\,n_f(r-2)+n_f(r-4).$$

Mit Rücksicht auf die Anfangswerte erhält man schließlich:

Satz 6. *Bedeuten $n_k(r)$, $n_f(r)$ die Anzahlen der k- bzw. f-Klassen r-ter Ordnung, so ist*

$$n_k(1)=1, \qquad n_k(2)=0, \qquad n_f(1)=0, \qquad n_f(2)=1,$$

und für $j \geqq 2$

$$n_k(2j-1)=n_k(2j)=B_{j-2}(\sqrt{2}), \qquad n_f(2j-1)=n_f(2j)=A_{j-2}(\sqrt{2}),$$

wobei unter $A_\mu(\sqrt{2})$ und $B_\mu(\sqrt{2})$ der μ-te Näherungszähler und -nenner des regelmäßigen Kettenbruches für $\sqrt{2}$ zu verstehen sind; also

$$A_\mu(\sqrt{2})=\frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})^{\mu+1}+(1-\sqrt{2})^{\mu+1}\right],$$

$$B_\mu(\sqrt{2})=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(1+\sqrt{2})^{\mu+1}-(1-\sqrt{2})^{\mu+1}\right].$$

Zu der folgenden Tabelle, welche die Ergebnisse für $1 \leqq r \leqq 8$ veranschaulicht, ist nur noch zu bemerken, daß sich bei ungünstiger Wahl der Konstante m in Gl. (8) auch imprimitive $2r$-gliedrige Perioden ergeben können. Andererseits erhält man sicher primitive Perioden, wenn man z. B. m jeweils so groß wählt, daß $2b_0 > \max b_\nu$ $(\nu=1, \ldots, r-1)$ wird.

k-Klassen						r	f-Klassen						
	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
lasse besteht aus der leeren Folge						1	leere Klasse						
leere Klasse						2	1						
						3	2	1					
	$2b_1+1$					4	2	2	1				
	b_3	$2b_1$				5	2	2	2	1			
	2	$2b_1+1$					1	b_2	$2b_2+1$	1			
							$2b_2+1$	b_2	1	1			
+1	1	b_4	$2b_1$			6	2	2	2	2	1		
	2	2	$2b_1+1$				1	b_2	1	$2b_2+2$	1		
							$2b_3+2$	1	b_3	1	1		
	b_3	$2b_3$	b_5	$2b_1$		7	2	2	2	2	2	1	
+1	2	1	b_5	$2b_1$			2	1	b_3	$2b_3+1$	2	1	
	2	2	2	$2b_1+1$			2	$2b_3+1$	b_3	1	2	1	
	$2b_4+1$	b_4	1	$2b_1+1$			1	b_2	$2b_4$	b_4	$2b_2+1$	1	
	1	b_4	$2b_4+1$	$2b_1+1$			1	b_2	1	2	$2b_2+2$	1	
							$2b_4+1$	b_2	$2b_2$	b_4	1	1	
							$2b_4+2$	2	1	b_4	1	1	
	b_3	1	$2b_3+1$	b_6	$2b_1$	8	2	2	2	2	2	2	1
+1	2	2	1	b_6	$2b_1$		2	1	b_3	1	$2b_3+2$	2	1
	2	2	2	2	$2b_1+1$		2	$2b_4+2$	1	b_4	1	2	1
	$2b_5+2$	1	b_5	1	$2b_1+1$		1	b_2	$2b_5+1$	1	b_5	$2b_2+1$	1
	1	b_4	1	$2b_4+2$	$2b_1+1$		1	b_2	1	2	2	$2b_2+2$	1
							$2b_5+1$	b_2	1	$2b_2+1$	b_5	1	1
							$2b_5+2$	2	2	1	b_5	1	1

(Eingegangen am 6. Dezember 1949.)

Ein affines Analogon zur Bestimmung einer Fläche aus einer Grundform und einer Krümmungsfunktion durch W. Scherrer.

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag am 7. Mai 1950 gewidmet.

Von

Wilhelm Süss in Freiburg i. Br.

W. Scherrer[1]) hat den Satz ausgesprochen, daß eine Fläche durch einen Streifen aus einer der drei Grundformen und einer zugeordneten Krümmungsfunktion eindeutig bestimmt werden kann. Für die dritte Grundform läßt sich hierfür ein besonders durchsichtiger und kurzer Beweis angeben, wenn man mit ihr z. B. die Summe der Hauptkrümmungsradien als Funktion der Parameter vorgibt[2]). Wir wollen hier einen entsprechenden Satz für die affine Differentialgeometrie beweisen. Der Gedankengang wird besonders durchsichtig, wenn man dabei den Weg über eine geeignete relative Differentialgeometrie wählt (§ 2). Wir legen der Theorie zwei polar-reziproke Eichflächen zu Grunde, für die der Formelapparat der Differentialgeometrie der homogenen Affinitäten entwickelt wird (§ 1), wie er sich etwa auch in der Darstellung von E. Salkowski[3]) findet. Der allgemeine relativgeometrische Bestimmungssatz (§ 3) enthält die gesuchten Analoga des Satzes von W. Scherrer sowohl für die Flächentheorie der homogenen wie für diejenige der raumtreuen Affinitäten, für die wir uns auf das bekannte Buch von W. Blaschke[4]) beziehen. Er ist eine unmittelbar erkennbare Erweiterung des a. a. O.[2]) behandelten Satzes.

§ 1.

Flächentheorie der homogenen Affinitäten.

Wir gehen aus von zwei zueinander polar-reziproken Flächen $\mathfrak{e}(u^1, u^2)$ und $\mathfrak{E}(u^1, u^2)$, für die also die folgenden Beziehungen bestehen:

$$(1) \qquad \mathfrak{e}\,\mathfrak{E} = 1, \qquad \mathfrak{e}\,\mathfrak{E}_i = \mathfrak{e}_i\,\mathfrak{E} = 0 \quad \left(\text{hierin ist z. B. } \mathfrak{e}_i = \frac{\partial\,\mathfrak{e}}{\partial\,u^i}\right).$$

[1]) Stützfunktion und Radius I. Comm. Math. Helv. 22, 366—381 (1947).

[2]) Bestimmung einer Fläche durch die dritte Grundform und die Summe der Hauptkrümmungsradien, Arch. d. Math. 2, 103—104 (1950).

[3]) Affine Differentialgeometrie, Leipzig u. Berlin 1934.

[4]) Vorlesungen über Differentialgeometrie II, Berlin 1923.

Die für beide Flächen symmetrische quadratische Differentialform mit den Koeffizienten

$$\gamma_{ik} = \mathfrak{e}_{ik}\mathfrak{E} = -\mathfrak{e}_i\mathfrak{E}_k = \mathfrak{e}\,\mathfrak{E}_{ik} = \gamma_{ki} \tag{2}$$

benutzen wir als quadratische Grundform unserer Theorie. Wir nehmen an, daß die beiden Determinanten

$$(\mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2\mathfrak{e}) = d, \qquad (\mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_2\mathfrak{E}) = D \tag{3}$$

im allgemeinen nicht verschwinden, daß also auch

$$d\,D = \|\gamma_{ik}\| = \gamma \neq 0 \tag{3'}$$

ist. Die beiden Flächen gehen übrigens durch die Gleichungen

$$\mathfrak{E} = \frac{\mathfrak{e}_1 \times \mathfrak{e}_2}{d}, \qquad \mathfrak{e} = \frac{\mathfrak{E}_1 \times \mathfrak{E}_2}{D} \tag{1'}$$

auseinander hervor.

Die Ableitungsgleichungen unserer Flächentheorie haben bei kovarianter Ableitung bezüglich (2) die Gestalt [siehe [3]) p. 130]

$$\mathfrak{e}_{ik} = \alpha'_{ik}\mathfrak{e}_l + \gamma_{ik}\mathfrak{e}, \qquad \mathfrak{E}_{ik} = -\alpha'_{ik}\mathfrak{E}_l + \gamma_{ik}\mathfrak{E}, \tag{4}$$

wobei die Größen

$$\alpha_{ikl} = \mathfrak{e}_{ikl}\mathfrak{E} = -\mathfrak{e}_{ik}\mathfrak{E}_l = \mathfrak{e}_i\mathfrak{E}_{kl} = -\mathfrak{e}\,\mathfrak{E}_{ikl} = \alpha_{kil} = \alpha_{ilk} \tag{4'}$$

in den Indizes symmetrisch und die Koeffizienten einer invarianten kubischen Grundform der Theorie sind. Man errechnet noch [siehe [3]) p. 132 (31)]:

$$\alpha^k_{ik} = \tau_i = \frac{\partial}{\partial u^i}\ln\left|\frac{d}{\sqrt{|\gamma|}}\right| = \frac{\partial}{\partial u^i}\ln\left|\frac{\sqrt{|\gamma|}}{D}\right| = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u^i}\ln\left|\frac{d}{D}\right|. \tag{5}$$

Der Quotient der beiden Determinanten d und D hat übrigens die Bedeutung der 4. Potenz der sogenannten affinen Entfernung des Ursprungs von der Fläche $\mathfrak{e}$. Aus den Ableitungsgleichungen (4) und aus (5) gehen die homogenen Differentialgleichungen

$$\mathfrak{e}^k_k = \tau^l\mathfrak{e}_l + 2\mathfrak{e}, \qquad \mathfrak{E}^k_k = -\tau^l\mathfrak{E}_l + 2\mathfrak{E} \tag{6}$$

für $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{E}$ hervor.

Als Integrierbarkeitsbedingungen der Ableitungsgleichungen erhält man aus dem Ansatz

$$\mathfrak{e}_{ikl} - \mathfrak{e}_{ilk} = R_{i\,,lk}^{\,r}\,\mathfrak{e}_r,$$

wobei $R_{ir,lk}$ der RIEMANN'sche Krümmungstensor bezüglich (2) ist, die beiden Aussagen

$$\begin{cases} R_{ir,lk} = \alpha^s_{ik}\alpha_{slr} - \alpha^s_{il}\alpha_{skr} + \gamma_{ik}\gamma_{lr} - \gamma_{il}\gamma_{kr} \\ \alpha_{ikr,l} = \alpha_{ilr,k} = \cdots \quad \text{(symmetrischer Tensor)}^5). \end{cases} \tag{7}$$

[5]) Hieraus folgt nebenbei für die simultanen Invarianten der quadratischen und der kubischen Grundform

$$I = \tfrac{1}{2}\alpha_{ikl}\alpha^{ikl}, \qquad L = \tfrac{1}{2}\tau^l\tau_l = \tfrac{1}{2}\alpha^{kl}_k\alpha^i_{il}$$

und für die GAUSS'sche Krümmung R der Form (2) die Gleichung

$$R = L + 1 - I.$$

§ 2.

Relative Flächentheorie bei Zuordnung durch parallele Normalen.

Die beiden in § 1 gleichzeitig betrachteten Flächen seien jetzt als Eichflächen benutzt. Der Fläche $\mathfrak{e}$ sei durch Parallelismus entsprechender Tangentenebenen eine Fläche $\mathfrak{x}$ zugeordnet, so daß Gleichungen der Gestalt bestehen

$$\mathfrak{x}_i = p_i^l \mathfrak{e}_l, \qquad \mathfrak{x}_i \mathfrak{E} = 0. \tag{8}$$

Für die Fläche $\mathfrak{x}$ sind die Vektoren $\mathfrak{E}$ normierte Vektoren der gewöhnlichen Flächennormalen. Wenn man die Gleichungen (8) als verallgemeinerte Weingarten'sche Ableitungsgleichungen ansieht, in der die Vektoren $\mathfrak{e}$ als solche der Relativnormalen einer relativen Flächentheorie aufgefaßt werden, so sind die Größen

$$p_k^k = \sigma = r_1 + r_2 \tag{9}$$

die Verallgemeinerungen der Summe der Hauptkrümmungsradien der üblichen Flächentheorie, die hier Relativkrümmungsradien heißen. Die Koeffizienten der Gleichungen (8) gestatten die Darstellung

$$p_{ik} = -\mathfrak{x}_i \mathfrak{E}_k = \mathfrak{x}_{ik} \mathfrak{E} = p_{ki}. \tag{9'}$$

Als Integrierbarkeitsbedingungen der Weingarten'schen Gleichungen (8) erhält man aus

$$\mathfrak{x}_{ik} = \mathfrak{x}_{ki} = p_{i,k}^l \mathfrak{e}_l + p_i^r (\alpha_{rk}^l \mathfrak{e}_l + \gamma_{rk} \mathfrak{e})$$

die Gleichung

$$p_{il,k} + p_i^r \alpha_{rkl} = p_{kl,i} + p_k \alpha_{ril}. \tag{10}$$

Führt man als Relativentfernung des Ursprungs von der Fläche $\mathfrak{x}$ die Funktion

$$A = -\mathfrak{x} \mathfrak{E} \tag{11}$$

ein, so wird nach (4) und (8)

$$A_{ik} = p_{ki} - \alpha_{ik}^l A_l + \gamma_{ik} A \tag{12a}$$

und hieraus durch Überschiebung mit (2) nach (5) und (9)

$$A_k^k = \sigma - \tau^l A_l + 2A. \tag{12}$$

§ 3.

Bestimmung von Flächen durch vorgegebene Streifen.

Zunächst beweisen wir einen allgemeinen Bestimmungssatz unserer relativen Flächentheorie, aus dem dann die in der Einleitung genannten Sätze für die affine Flächentheorie gefolgert werden.

Satz 1. *Die Koeffizienten γ_{ik} der quadratischen Grundform* (2) *sowie die Größen σ und τ seien als Funktionen der Parameter u^1 und u^2 bekannt: ferner seien zwei durch parallele Normalen in entsprechenden Punkten zugeordnete nicht-asymptotische Flächenstreifen $S_{\mathfrak{e}}$ und $S_{\mathfrak{x}}$ gegeben. Dann gibt es stets zwei durch $S_{\mathfrak{e}}$ und $S_{\mathfrak{x}}$ gehende Flächen $\mathfrak{e}$ bzw. $\mathfrak{x}$, deren Tangentenebenen in entsprechenden Punkten einander parallel sind, mit folgenden Eigenschaften:*

a) *Die Fläche $\mathfrak{e}$ und die zu ihr polar-reziproke $\mathfrak{E}$ haben die gegebenen Größen γ_{ik} zu Koeffizienten der quadratischen Grundform der homogen-affinen Flächentheorie von* § 1*;*

b) *die gegebene Funktion τ genügt den Gleichungen* (5) *dieser Theorie:*

c) *die gegebene Funktion σ ist die in* (9) *eingeführte Summe der Relativkrümmungsradien der Fläche $\mathfrak{x}$ bezüglich $\mathfrak{e}$ als Eichfläche.*

Beweis. Durch $S_{\mathfrak{e}}$ läßt sich eindeutig eine Lösung der ersten der beiden Differentialgleichungen (6) legen. Aus (1) und (1′) gewinnt man danach die Fläche $\mathfrak{E}$. Jetzt läßt sich die Relativentfernung A nach (11) zunächst längs des Streifens $S_{\mathfrak{x}}$ bestimmen. Aus diesen Randwerten gewinnt man dann aus der Differentialgleichung (12) diese Relativentfernung überhaupt. Die Ableitungsgleichungen (4) für $\mathfrak{e}$ liefern die Koeffizienten der kubischen Grundform (4′). Für die Fläche $\mathfrak{E}$ sind die Ableitungsgleichungen (4) gleichzeitig miterfüllt. Für die beiden Ableitungsgleichungen (4) erhält man die Integrierbarkeitsbedingungen (7). Nun errechnet man für die aus (12a) bestimmten Größen p_{ik}, daß auch die Gleichungen (10) erfüllt sind, daß somit unsere verallgemeinerten Weingarten'schen Gleichungen (8) integrierbar sind, d. h. daß die Fläche $\mathfrak{x}$ durch den Streifen $S_{\mathfrak{x}}$ eindeutig bestimmbar ist. Es ist nämlich nach (12a) und (7)

$$\begin{aligned} A_{ikl} - A_{ilk} &= R^{t}_{i.,lk} A_t = A_t[\alpha^s_{ik}\alpha^t_{sl} - \alpha^s_{il}\alpha^t_{sk} + \gamma_{ik}\gamma^t_l - \gamma_{il}\gamma^t_k] \\ &= p_{ki,l} - p_{li.k} - \alpha_{iks,l}A^s + \alpha_{ils,k}A^s - \alpha^s_{ik}(p_{ls} - \alpha^t_{sl}A_t + \gamma_{sl}A) \\ &\quad + \alpha^s_{il}(p_{ks} - \alpha^t_{sk}A_t + \gamma_{sk}A) + \gamma_{ik}A_l - \gamma_{il}A_k, \end{aligned}$$

so daß die Gleichungen (10) folgen, w. z. b. w.

Bei Identifizierung der beiden Flächen $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{x}$ erhält man aus Satz 1 sofort das entsprechende Ergebnis für die Flächentheorie der homogenen Affinitäten. Dabei ist also neben der Grundform (2) nur die Affinentfernung des Ursprungs von der Fläche (die Funktion τ) als vorgegeben anzusetzen. Bei der Flächentheorie der raumtreuen Affinitäten dagegen gelingt auf folgende Weise die Rückführung auf die homogene Affingeometrie. Betrachten wir nach der Darstellung von W. Blaschke[4]) die quadratische Grundform (G_{ik}) und die mittlere Affinkrümmung H als Funktionen der Parameter gegeben, so bestimmt sich die Affinentfernung P des Ursprungs von der Fläche $\mathfrak{e}$ bei vorgegebenen Flächenstreifen aus der Differentialgleichung ([4]) p. 156)

$$G^{ik}P_{ik} + 2HP + 2 = 0.$$

Zwischen den quadratischen Grundformen der raumtreuen und der homogenen Affinitäten besteht nun die Beziehung ([3] p. 141)

$$G_{ik} = P\gamma_{ik}.$$

Wegen der in § 1 genannten Bedeutung der Funktion τ in Satz 1 ist damit die Frage der raumtreuen affinen Geometrie bereits auf den gerade besprochenen Fall der homogenen Affingeometrie zurückgeführt. Es gilt also

Satz 2. *Durch einen vorgegebenen Streifen läßt sich eine Fläche dadurch eindeutig bestimmen, daß man für sie entweder die quadratische Grundform der homogenen Affingeometrie und die Affinentfernung des Ursprungs von der Fläche als Funktionen der Parameter vorgibt, oder dadurch, daß man außer der quadratischen Grundform der raumtreuen Affingeometrie die mittlere Affinkrümmung als Funktionen der Parameter festlegt.*

(Eingegangen am 10. Dezember 1949.)

Bemerkung über die Definition der Riemannschen Flächen*).

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag am 7. Mai 1950 gewidmet.

Von

C. Carathéodory †.

1. Vor einigen Jahren hat Herr van der Waerden eine außerordentlich einfache, schöne und sachgemäße Darstellung des Hauptsatzes der Uniformisierung veröffentlicht[1]). Als ich nun kürzlich eine Neuauflage meines kleinen Buches „Conformal Representation“[2]) vorbereitete und insbesondere ein letztes Kapitel über Uniformisierung hinzufügen wollte, bemerkte ich, daß es notwendig ist, die übliche auf H. Weyl zurückgehende Definition einer abstrakten Riemannschen Fläche zu modifizieren, wenn man alle Vorteile ausnützen will, welche die wunderbar klare und doch so kurze Behandlung der topologischen Seite des Problems durch van der Waerden bietet.

2. Zunächst einige Bemerkungen über kombinatorische Topologie! Van der Waerden drückt sich auf S. 149 folgendermaßen aus:

„Eine Fläche ist eine Gesamtheit von endlich oder unendlich vielen elementargeometrischen Dreiecken, deren Kanten nach einer bestimmten Heftungsvorschrift paarweise aufeinander geheftet werden. Dieses Zusammenheften besteht darin, daß die betreffenden zwei Kanten topologisch (z. B. affin) abgebildet, und entsprechende Punkte identifiziert werden, ...“.

Wenn man nun die darauf folgenden Ausführungen van der Waerdens aufmerksam liest, so sieht man, daß darin weder die inneren Punkte der Dreiecke noch die inneren Punkte ihrer Seiten benutzt werden. Die einzigen Punkte der Fläche S, die in seinen Beweisen vorkommen, sind die Ecken der Triangulation. Die Kanten der Triangulation können aber durch das geordnete Paar ihrer Endpunkte, ihre Dreiecke durch gewisse Punkttripel in bestimmter Reihenfolge bezeichnet werden. Man findet weiter, daß die gerade zitierte Heftungsvorschrift nicht beschrieben zu werden braucht: Sie kann durch die einfache Zuordnung von bestimmten Dreiecksseiten ersetzt werden.

*) Der Verfasser verstarb am 2. Februar 1950. Die beiden Korrekturen wurden von der Schriftleitung an Hand des Manuskriptes mit möglichster Sorgfalt gelesen.

[1]) B. L. van der Waerden, Topologie und Uniformisierung der Riemannschen Flächen (Leipz. Sitzungsber. Bd. 93, S. 147—160, Sitzung vom 8. 12. 1941).

[2]) Cambridge tracts in Mathematics. Nr. 28 (1932).

So umständlich eine solche Bezeichnungsweise und nichtssagend eine solche Deutung der Zusammenhänge erscheint, sie reicht vollkommen aus, um alle weiteren Schritte zu vollziehen. Insbesondere können die Kantenwege, die Wegeklassen usw. beschrieben oder der einfache Zusammenhang einer Fläche S und die universelle Überlagerungsfläche $\bar{S}$ von S definiert werden. Auch der Begriff des Randes eines Flächenstückes, den VAN DER WAERDEN durch Summenoperationen modulo 2 erklärt, behält bei dieser Auffassung einer abstrakten Fläche seinen guten Sinn.

Sogar das folgende, grundlegende Theorem von VAN DER WAERDEN*) kann ebenso bewiesen werden: *Ist S eine einfachzusammenhängende offene Fläche, so ist es immer möglich ihre unendlich vielen Dreiecke T_j so anzuordnen, daß jedes der Flächenstücke*

$$\Sigma_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

von einem einzigen Polygon berandet wird.

Ist diese Bedingung für die n ersten Flächenstücke $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ erfüllt, so gibt VAN DER WAERDEN ein Verfahren an, um ein Dreieck T_{n+1} zu finden, welches mit dem Rande R_n von Σ_n entweder zwei Seiten oder eine Seite gemeinsam hat, aber nicht eine Seite und den gegenüberliegenden Eckpunkt, und zeigt außerdem, daß bei Iteration dieses Verfahrens alle Dreiecke von S ausgeschöpft werden.

3. Aus diesem Gerippe entsteht nun eine RIEMANNsche Fläche, indem man es durch weitere Festsetzungen in einen Umgebungsraum verwandelt, der in jedem seiner Punkte die Winkelmetrik der komplexen Ebene trägt.

Dazu werden wir jedem Dreieck T_j der Triangulation eine (geschlossene) JORDANsche Kurve α_j zuordnen, die auf der Ebene einer komplexen Variablen t_j gezeichnet ist, und auf welcher drei Punkte P_j, Q_j, R_j markiert sind. Das beschränkte Gebiet, welches durch α_j berandet wird, soll dann als eine konforme Abbildung von T_j angesehen werden.

Aus der Tatsache, daß man irgend zwei JORDANsche Gebiete konform aufeinander abbilden kann, wobei die Abbildung auch auf den Rändern stetig ist, folgt unmittelbar, daß weder die Gestalt noch die Größe der Kurven α_j und auch nicht die Lage der drei Eckpunkte bei dieser „Abbildung" in Betracht kommt. Dagegen können jetzt die einzelnen Punkte von T_j identifiziert werden.

Hat man nämlich α_j auf die Gestalt eines Kreises gebracht, so wird jeder Punkt von T_j auf einen Punkt A_j der durch α_j berandeten Kreisscheibe abgebildet und durch das Doppelverhältnis (P_j, Q_j, R_j, A_j)

*) Dies Theorem wurde von VAN DER WAERDEN in Aufgabe 274 im Jahresber. d. DMV **49** (1939), *S. 1* aufgestellt. Den Beweis gab H. REICHARDT, Lösung der Aufgabe 274, Jahresber. d. DMV **51** (1941), *S 23.* Die Schriftleitung.

charakterisiert. In den inneren Punkten von T_j, d. h. in den Punkten, für welche (P_j, Q_j, R_j, A_j) nicht reell ist, ist gleichzeitig die gewünschte Winkelmetrik festgelegt.

4. Nun müssen wir das Zusammenschweißen von benachbarten Dreiecken T_j und T_k unserer Fläche und zugleich auch die Winkelmetrik in den zu identifizierenden Punkten ihres Randes realisieren. D. h. wir müssen gleichzeitig die beiden Dreiecke auf eine und dieselbe komplexe t-Ebene konform abbilden, so daß sie sich längs einer ihrer Seiten berühren.

Man könnte glauben, daß es dazu notwendig ist, von vorn herein solche konforme Abbildungen zu kennen, bei welchen eine ganze Umgebung der verschiedenen Dreiecke mit abgebildet wird. Dann

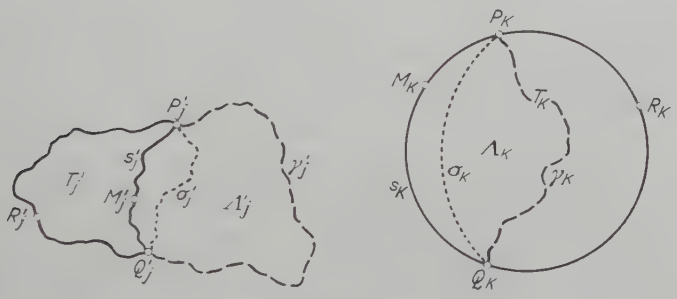

Fig. 1.

würde die Winkelmetrik auch für den ganzen Rand eines jeden einzelnen Dreiecks feststehen. Es wäre aber sehr umständlich, diese verschiedenen konformen Abbildungen so aufeinander abzustimmen, daß sie ein Zusammenheften der Dreiecke überhaupt vertragen.

Glücklicherweise kann man die Voraussetzungen so einschränken, daß nirgends Widersprüche entstehen. Es genügt nämlich, an einer Seite des Dreiecks T_j einen Lappen anzubringen, den man auf einen Teil von T_k konform aufzukleben hat. Zu diesem Zweck gibt man sich in einer t_j'-Ebene eine konforme Abbildung T_j' des Dreiecks T_j mit dem anhängenden Lappen Λ_j' und zeichnet im Dreieck T_k der t_k-Ebene den Rand γ_k von Λ_k ein.

Man hat dann in der t_j'-Ebene zwei von Jordanschen Kurven begrenzte Gebiete T_j' und Λ_j', die sich längs der Jordanschen Kurve s_j' berühren, und in der t_k-Ebene einen Kreis $P_k Q_k R_k$ mit dem Querschnitt γ_k (Fig. 1). Das Bild Λ_k von Λ_j' wird durch den Kreisbogen s_k und durch γ_k begrenzt. Die konforme Abbildung von Λ_j' auf Λ_k ist eindeutig bestimmt, wenn man noch auf den sich entsprechenden Kurvenbögen s_j' und s_k zwei Punkte M_j' und M_k vorgibt, die identifiziert werden sollen.

Um dann die beiden Dreiecke T_j und T_k zusammenzufügen, bedient man sich einer Methode, die ich wiederholt beschrieben habe[3]). Diese Methode ist besonders einfach, wenn man wie in der Fig. 1 die Punkte P_k und Q_k durch einen Kreisbogen σ_k innerhalb Δ_k miteinander verbinden, kann, aber sie kann mit Hilfe eines naheliegenden Grenzprozesses auch auf die Fälle erweitert werden, bei welchen kein derartiger Kreisbogen existiert.

5. Wir wollen noch verlangen, daß die Ecken der Triangulation innere Punkte unserer Riemannschen Fläche sein sollen. Dann sind neue Voraussetzungen über das Anhängen von Dreiecken erforderlich.

Es seien also A eine Ecke der Triangulation und $T_1, T_2, \ldots, T_p$ die aufeinanderfolgenden Dreiecke, die in einem geschlossenen Kranz um A herum gelagert sind. Dann können wir T_2 mit T_1 zusammenheften, hierauf T_3 mit $(T_1 + T_2)$ und schließlich T_{p-1} mit $(T_1 + T_2 + \cdots + T_{p-2})$. Um nun den Kranz zu schließen, nehmen wir an, daß eine konforme Abbildung von T_p existiert, bei welcher ein an T_p anhängender Lappen gezeichnet werden kann, der sowohl die beiden an die Figur $(T_1 + \cdots + T_{p-1})$ angrenzenden Seiten von T_p als auch die allen unseren Dreiecken gemeinsame Ecke A umgibt. Ferner nehmen wir an, daß wir das Bild dieses Lappens innerhalb der Figur $T_1 + \cdots + T_{p-1})$ einzeichnen können.

Unter diesen Voraussetzungen ist die Methode des vorigen Paragraphen anwendbar; außerdem ist die Konstruktion eindeutig bestimmt, weil jetzt der Punkt A die Rolle der früher benutzten Punkte M_k und M_j' übernimmt.

6. Die Ausführungen der zwei letzten Paragraphen sind direkt auf den Satz von van der Waerden (§ 2) abgestimmt. Unsere Überlegungen zeigen nämlich, daß ein Dreieck, welches mit zwei seiner Seiten an ein Flächenstück angrenzt, dessen Rand ein einfaches Polygon ist, mit diesem Flächenstück verschmolzen werden kann.

Durch Kombination unserer Resultate mit dem Konvergenzsatz des § 125 meiner „Conformal Representation", können wir die ganze universelle Überlagerungsfläche $\bar{S}$ einer beliebigen Riemannschen Fläche S ausschöpfen und gleichzeitig das Grenzkreistheorem beweisen. Nur für den Fall, daß S eine geschlossene Fläche vom Zusammenhang der Kugel ist, muß man den Beweis ein wenig umändern. In jedem anderen Fall ist $\bar{S}$ eine offene Fläche, welche (außer im Fall des einfachen Zusammenhanges von S) die Fläche S unendlich oft überdeckt. Dann muß man immer für je zwei Paare benachbarter Dreiecke von $\bar{S}$, welche einem und demselben Paar von Dreiecken aus S überlagert sind, dieselben Jordanschen Bögen γ_j' und γ_k und dieselben Punkte M_j' und M_k (vgl. Fig. 1) bei unserer Konstruktion benutzen.

[3]) Schwarz-Festschrift (Berlin, Springer 1914), S. 36. Conformal Representation, S. 98.

Wir erhalten auf der Ebene der uniformisierenden Variablen ein vollständiges konformes Muster der Triangulation von S. Man beachte übrigens, daß die Kanten der Triangulation auf Jordansche Kurvenbögen abgebildet werden, die keine Tangenten zu besitzen brauchen, so daß im Allgemeinen die Dreieckswinkel nicht existieren.

Freilich kann man die ursprüngliche Triangulierung mit Beibehaltung der Ecken durch eine äquivalente ersetzen, deren Kanten analytisch sind oder sogar mit den geodätischen Linien einer sphärischen, Euklidischen oder Nichteuklidischen Geometrie zusammenfallen.

7. Die zusätzlichen Voraussetzungen, die wir im § 5 betrachtet haben, sind keineswegs befriedigend. Man kann versuchen, von diesen Voraussetzungen abzusehen. Aber dann zeigen schon die einfachsten Beispiele, daß es unter Umständen unmöglich ist, die gemeinsame Ecke A eines Kranzes von Dreiecken auf einen Punkt des Gebietes der uniformisierenden Variablen abzubilden. Man kann zwar immer die Dreiecke eines geschlossenen Kranzes auf ein schlichtes Gebiet abbilden, aber die aufeinanderfolgenden Dreiecke dieses Bildes brauchen keine gemeinsame Ecke, sondern nur ein gemeinsames Primende zu besitzen.

Das Gebiet, in welchem die allgemeine uniformisierende Variable erklärt ist, ist dann nicht mehr einfach zusammenhängend. Es kann endlich oder unendlich viele Löcher aufweisen, die von analytischen Kurven begrenzt werden. Da jede dieser analytischen Kurven isoliert liegt, kann man erzwingen, daß alle diese Löcher kreisförmig werden, wodurch der Unitätssatz gesichert wird.

Aber die Darstellung aller dieser Erscheinungen, die eine sorgfältige Vorbereitung benötigen, kann nicht in den Rahmen dieser kurzen Notiz eingepaßt und nicht einmal skizziert werden. Sie muß für eine andere Gelegenheit aufbewahrt werden.

8. Der erste, der die abstrakten Riemannschen Flächen streng definiert und behandelt hat, war H. Weyl[4]). Will man, wie es van der Waerden getan hat, von der Weylschen Definition ausgehen, und den Anschluß an unsere Überlegungen herstellen, so hat man zu zeigen, daß alle unsere Operationen für mindestens eine Unterteilung einer Weylschen Triangulation ausführbar sind, und dies gelingt ohne weiteres.

Einen Schritt weiter als Weyl ist T. Radó gegangen[5]). Er benutzt nämlich eine topologische Definition einer zwei-dimensionalen Mannigfaltigkeit, aus welcher das zweite Hausdorffsche Abzählbarkeitsaxiom nicht folgt, so daß unter Umständen eine Triangulation nicht existiert. Daß letzteres möglich ist, zeigt er an einem besonders lehrreichen Beispiel von Heinz Prüfer. Dann definiert Radó für diese Flächen eine „kon-

[4]) H. Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche (Leipzig u. Berlin, 1913), S. 34.

[5]) T. Radó, Über den Begriff der Riemannschen Fläche (Acta Szeged, Bd. 2, 1925) S. 101—121.

forme Abbildung im Kleinen" und bezeichnet mit dem Worte „Riemannsche Fläche" jede zweidimensionale Mannigfaltigkeit, die eine solche konforme Abbildung zuläßt. Geht man von einer solchen Radóschen Fläche R aus, so kann man Stücke von gewöhnlichen Riemannschen Flächen, die einen Punkt O von R enthalten, auf R ausbreiten und mit Hilfe des Grenzkreistheorems schließen, daß auf diese Weise die ganze Mannigfaltigkeit R überdeckt werden kann[6]).

Dieser Beweis zeigt, daß die Radósche Definition mit der obigen gleichwertig ist, und auch gleichzeitig, daß unsere Überlegungen nicht überflüssig sind.

---

[6]) Vgl. auch M. Heins, Annals of mathematics, Vol. 50, 1949. S. 686—690.

(Eingegangen am 13. Dezember 1949.)

Zur Theorie der Dirichletschen Reihen.

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag am 7. Mai 1950 gewidmet.

Von

Harald Bohr in Kopenhagen.

Einleitung.

Von wesentlichem Einfluß auf das Studium der Dirichletschen Reihen einer komplexen Veränderlichen $s = \sigma + it$, sowohl im eigentlichen Sinne d. h. vom Typus

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-s \log n} \tag{1}$$

als auch vom verallgemeinerten Typus

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \quad (0 \leqq \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots;\ \lambda_n \to \infty) \tag{2}$$

war eine große Abhandlung des französischen Mathematikers Cahen aus dem Jahre 1894, in welcher zuerst eine umfassende und vielseitige Untersuchung dieses interessanten Reihentypus vorgenommen wurde. Schon vorher war übrigens von dem dänischen Mathematiker Jensen in einer unbeachtet gebliebenen kleineren Arbeit im Jahre 1884 die wesentliche Tatsache erkannt worden, daß das Konvergenzgebiet einer jeden Dirichletschen Reihe eine Halbebene $\sigma > A_0$ ist. Bei Cahen waren aber die Beweismethoden, was ihre Genauigkeit anbelangt, meistenteils sehr unvollkommen, und es war deshalb eine Zeitlang zweifelhaft, welche von seinen vielen angegebenen Resultaten tatsächlich allgemein gültig waren. Es war daher von der größten Bedeutung für die Weiterentwicklung der Theorie, daß Perron in einer durch die Klarheit, Sinngemäßheit und Strenge der Methoden klassischen Arbeit in Crelles Journal 1908 die gesamten Fragestellungen von Cahen und einige weitere darüber hinausgehende Probleme wieder in Angriff nahm. In dieser Arbeit fanden u. a. alle im Zusammenhang mit der Cahenschen Arbeit offen gebliebenen Fragen ihre endgültige Lösung bis auf eine einzige, die die Multiplikation Dirichletscher Reihen betrifft. Indem wir uns auf Dirichletsche Reihen im eigentlichen Sinne beschränken, hatte Stieltjes im Jahre 1887 u. a. bewiesen, daß die Produktreihe $\sum A_n n^{-s}$ ($A_n = \sum a'_m a''_l$, $m l = n$) von zwei Dirichletschen Reihen $\sum a'_n n^{-s}$ und $\sum a''_n n^{-s}$, die beide etwa für $\sigma > 0$ konvergieren, jedenfalls für $\sigma > \frac{1}{2}$ konvergiert. Die Frage, ob der von Cahen mit vermeintlichem

Beweis aufgestellte Satz, daß die Produktreihe sogar immer für $\sigma > 0$ konvergiert, richtig oder falsch ist, wurde von Perron offen gelassen, und erst Landau gelang es, durch Heranziehung speziellerer Eigenschaften der Riemannschen ζ-Funktion zu beweisen, daß dies nicht der Fall zu sein braucht. Abschließend wurde dann vom Verf. durch ein zu diesem Zweck besonders konstruiertes Gegenbeispiel gezeigt, daß die von Stieltjes angegebene Zahl $\frac{1}{2}$ tatsächlich die bestmögliche ist. Angeregt vor allem von Landau wurde ferner eine Reihe von neuen bedeutsamen Fragestellungen in Angriff genommen, von denen mehrere, u. a. von Schnee und Landau selbst, vollständig gelöst wurden.

Zu den vielen verschiedenartigen Problemen, die sich mit den Konvergenzeigenschaften von Dirichletschen Reihen befaßten, trat dann später ein umfassender neuer Problemkreis die Summierbarkeit der Dirichletschen Reihen außerhalb ihres Konvergenzgebietes betreffend hinzu. Zunächst wurde vom Verf. erkannt, daß die einfachste aller Summierbarkeitsmethoden, die Cesàro-Summierbarkeit zur analytischen Fortsetzung der durch eine Dirichletsche Reihe $\sum a_n n^{-s}$ in ihrer Konvergenzhalbebene dargestellten Funktion mit Erfolg verwendet werden konnte; so wurde z. B. gezeigt, daß die ζ-Reihe mit abwechselnden Vorzeichen $\sum (-1)^n n^{-s}$, die für $\sigma > 0$ konvergiert, in der ganzen Ebene C-summierbar ist, und zwar bei jedem ganzzahligen $r \geqq 0$ genau in der Halbebene $\sigma > -r$ von der r-ten Ordnung. Allgemein gilt, daß jede Dirichletsche Reihe $\sum a_n n^{-s}$ eine Summierbarkeitshalbebene $\sigma > \Lambda_r (r = 0, 1, 2, \ldots)$ besitzt, wo sie von der r-ten Ordnung C-summierbar ist; ferner wurde bewiesen, daß die Summierbarkeitsabszissen Λ_r (wo speziell Λ_0 die Konvergenzabszisse bezeichnet) die beiden Relationen

$$0 \leqq \Lambda_r - \Lambda_{r+1} \leqq 1 \quad \text{und} \quad \Lambda_r - \Lambda_{r+1} \geqq \Lambda_{r+1} - \Lambda_{r+2}$$

erfüllen (und daß diese sogar die „bestmöglichen" sind). Wie M. Riesz etwas später mitteilte, hatte er unabhängig vom Verf. die Cesàro-Summierbarkeit der Dirichletschen Reihen $\sum a_n n^{-s}$ untersucht, und dabei auch diese Summationsmethode sinngemäß verallgemeinert, so daß sie auch auf die Dirichletschen Reihen vom allgemeinen Typus $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$ angewendet werden konnte. Solche erweiterten Summationsmethoden (die mit den Rieszschen inhaltlich übereinstimmten) waren auch vom Verf. entwickelt und eine Arbeit darüber schon in meiner ersten Mitteilung angekündigt worden. Die Rieszschen Methoden waren aber in ihrer technischen Ausbildung den meinigen wesentlich überlegen, und in meinen weiteren Publikationen beschränkte ich mich deshalb auf die Dirichletschen Reihen im eigentlichen Sinne. Auch wurde von Riesz Summierbarkeit nicht nur ganzzahliger, sondern auch beliebiger nicht negativer Ordnung herangezogen und u. a. gezeigt, daß bei jedem reellen (und nicht nur ganzzahligen) $r \geqq 0$ eine Summierbarkeitshalbebene $\sigma > \Lambda_r$ existiert. Die vom Verf. gewonnenen Resultate

wurden in meiner Habilitationsschrift „Bidrag til de Dirichletske Rækkers Theori" 1910, im folgenden mit B zitiert, veröffentlicht, während die in gewissen Hinsichten wesentlich weitergehenden Resultate von Riesz in dem schönen Cambridge tract von Hardy und Riesz „The general theory of Dirichlet series" 1915, im folgenden mit HR zitiert, eine zusammenfassende Darstellung fanden.

In den letzten Jahren habe ich meine alten Untersuchungen über die Summierbarkeit Dirichletscher Reihen wieder aufgenommen. In der vorliegenden Abhandlung, in welcher ich mich durchweg auf die eigentlichen Dirichletschen Reihen $\sum a_n n^{-s}$ beschränken werde, soll ein Teilergebnis, das, besonders in methodischer Hinsicht, vielleicht an sich von Interesse ist, mitgeteilt werden.

Eines der Hauptresultate von Riesz und dem Verf. besagt, daß die Lage der „Summierbarkeitsgrenzgeraden" $\sigma = \Lambda$ ($\Lambda = \lim \Lambda_r$) einer Dirichletschen Reihe (1), im Gegensatz z. B. zu der Lage der Konvergenzgeraden $\sigma = \Lambda_0$, in einfachster Weise von den analytischen Eigenschaften der durch die Reihe dargestellten analytischen Funktion $f(s)$ abhängt. Die Zahl Λ fällt nämlich mit der „Ordnungsabszisse" Ω der Funktion $f(s)$ zusammen, welche als die untere Grenze derjenigen Abszissen σ_0 definiert ist, für welche die Funktion $f(s)$ in der Halbebene $\sigma > \sigma_0$ regulär und von endlicher Ordnung in bezug auf die Ordinate ist, d. h. gleich $O(|t|^k)$, wo $k = k(\sigma_0) < \infty$ ist. In den folgenden Ausführungen, die wie gesagt, einen fragmentarischen Charakter haben, werde ich mich ausschließlich auf den Fall beschränken, wo $-\infty < \Lambda_0 < \infty$ und die Ordnungsabszisse $\Omega = -\infty$ ist, d. h. wo die dargestellte Funktion $f(s)$ eine ganze transzendente Funktion ist, die in jeder Halbebene $\sigma > \sigma_0$ von endlicher Ordnung ist, was also nach dem eben genannten Satz auf dasselbe hinauskommt, daß die Reihe $\sum a_n n^{-s}$ in der ganzen Ebene C-summierbar ist. In diesem Fall ist bei jedem $r \geqq 0$ die Reihe in einer gewissen Halbebene $\sigma > \Lambda_r$ von der r-ten Ordnung summierbar, wobei Λ_r mit wachsendem r ständig abnimmt und für $r \to \infty$ gegen $-\infty$ strebt. Mit einer solchen Funktion $f(s)$ mit $\Omega = -\infty$ wird bekanntlich eine im ganzen Intervall $-\infty < \sigma < \infty$ definierte, sogenannte Lindelöfsche μ-Funktion $\mu(\sigma)$ verknüpft, die die Größenordnung der Funktion $f(s)$ auf vertikalen Geraden charakterisiert, d. h. wo $\mu(\sigma_0)$ für jedes σ_0 die untere Grenze aller Konstanten $k = k(\sigma_0)$ angibt, für welche $f(\sigma_0 + it) = O(|t|^k)$ ist. Diese Funktion $\mu(\sigma)$ ist bekanntlich eine stetige konvexe Funktion von σ, welche in einem gewissen Intervall $M \leqq \sigma < \infty$ gleich null ist — wobei übrigens nach einem bekannten Satz von Schnee der Intervallendpunkt M jedenfalls $\geqq$ der Konvergenzabszisse Λ_0 ist — und welche links von M positiv ist und mit abnehmendem σ ständig wächst. Während diese Funktion $\mu(\sigma)$, die wir als die „Ordnungsfunktion" von $f(s) = \sum a_n n^{-s}$ bezeichnen werden, von dem funktionentheoretischen Charakter unseres Objektes $f(s) = \sum a_n n^{-s}$ abhängt, gibt es eine andere für alle σ definierte

Funktion $\psi(\sigma)$, welche wir als die „Summierbarkeitsfunktion" bezeichnen werden, und die von Eigenschaften der Reihe als solcher abhängt. Diese Funktion $\psi(\sigma)$ ist folgendermaßen definiert. Sie ist gleich null für $\sigma \geqq \Lambda_0$ und bei jedem reellen $r > 0$ im Punkte Λ_r gleich r, wo Λ_r die r-te Summierbarkeitsabszisse unserer Reihe angibt. In Verallgemeinerung der oben für ganzzahlige Werte von r angegebenen Ungleichungen für die Abszissen Λ_r hat Riesz (vgl. HR, S. 60) einige Sätze bewiesen, die sich folgendermaßen aussprechen lassen. Die Funktion $\psi(\sigma)$ ist eine stetige konvexe Funktion von σ, welche in dem Intervall $-\infty < \sigma < \Lambda_0$, wo sie positiv ist, mit abnehmendem σ ständig wächst und zwar so, daß ihr Steigungswinkel von Anfang an (d. h. schon im Punkte Λ_0 von links) $\geqq 45^\circ$ ist. Zwischen den beiden soeben eingeführten konvexen Funktionen $\mu(\sigma)$ und $\psi(\sigma)$ bestehen ferner (vgl. HR, S. 49 und 53) die Ungleichungen

$$\psi(\sigma) \leqq \mu(\sigma) \leqq \psi(\sigma) + 1 .$$

Eines der Probleme, das ich zur Untersuchung aufgenommen habe, betrifft den genaueren Zusammenhang zwischen diesen beiden mit $f(s) = \sum a_n n^{-s}$ verknüpften Funktionen $\mu(\sigma)$ und $\psi(\sigma)$, wobei sogleich hervorgehoben werden soll, daß es keineswegs so ist, daß die eine dieser Funktionen etwa die andere eindeutig bestimmt; in der Tat wurde schon in B bewiesen, daß nicht einmal die Konvergenzabszisse Λ_0, d. h. der Punkt, wo die ψ-Kurve die Abszissenachse verläßt, durch die Kenntnis des Gesamtverlaufes der Funktion $\mu(\sigma)$ eindeutig festgelegt wird.

Im folgenden soll nur der extreme Spezialfall betrachtet werden, wo die ψ-Kurve einfach aus zwei Halbgeraden besteht, von denen die eine mit der reellen Achse zusammenfällt und die andere unter 45° steigt, d. h. wo die Funktion $\psi(\sigma)$ (wobei Λ_0 etwa gleich 0 gewählt wird) durch die Gleichung

$$\psi(\sigma) = \begin{cases} 0 \text{ für } \sigma \geqq 0 \\ -\sigma \text{ für } \sigma \leqq 0 \end{cases}$$

bestimmt ist. Nach den obigen Ungleichungen (in Verbindung mit der trivialen Ungleichung $\mu(\sigma) = 0$ für $\sigma > \Lambda_0 + 1 = 1$) sind dann unter den Möglichkeiten, die für die μ-Kurve überhaupt in Frage kommen, die beiden extremen Möglichkeiten offenbar durch

$$\mu(\sigma) = \psi(\sigma) = \begin{cases} 0 \text{ für } \sigma \geqq 0 \\ -\sigma \text{ für } \sigma \leqq 0 \end{cases}$$

bzw.

$$\mu(\sigma) = \begin{cases} 0 \text{ für } \sigma \geqq 1 \\ 1 - \sigma \text{ für } \sigma \leqq 1 \end{cases}$$

gegeben. Daß die erste dieser Möglichkeiten wirklich auftreten kann, ist speziell in einer kleinen Arbeit des Verf. „On the convergence

problem for Dirichlet series" in den Mitteilungen der Dänischen Akademie 1949 enthalten. In § 1 der vorliegenden Arbeit soll nunmehr der wesentlich schwierigere Existensbeweis gegeben werden, daß auch die zweitgenannte Möglichkeit tatsächlich vorkommen kann. Dies gelingt durch ein Konstruktionsverfahren, dessen Elemente — z. B. die Heranziehung von Differenzen immer höherer Ordnung — schon in B benutzt worden waren. Abgesehen von dem methodischen Interesse, das diese Konstruktion an sich aufweist, läßt sich das somit gewonnene „Gegenbeispiel" zur Aufklärung verschiedener Fragen bezüglich Dirichletscher Reihen verwenden. Bei dieser Gelegenheit soll dies nur in § 2 an einem kleineren Beispiel gezeigt werden und zwar, in Verallgemeinerung eines oben erwähnten Resultates des Verf. bezüglich der Multiplikation zweier konvergenter Dirichletscher Reihen, an der Frage der Lage der Konvergenzabszisse Λ_0 einer Dirichletschen Reihe $\sum A_n n^{-s}$, welche durch Multiplikation zweier Dirichletscher Reihen $\sum a'_n n^{-s}$ und $\sum a''_n n^{-s}$ entsteht, die beide in einer gewissen Halbebene C-summierbar sind und zwar die eine von der α_1-ten Ordnung, die andere von der α_2-ten Ordnung.

§ 1.

Konstruktion einer Dirichletschen Reihe von besonderem Typus.

In diesem Paragraphen soll der folgende Existenzsatz bewiesen werden:

Hauptsatz. *Es existiert eine Dirichletsche Reihe* $\sum a_n n^{-s}$ *mit der Konvergenzabszisse* $\Lambda_0 = 0$, *für welche die durch die Reihe dargestellte Funktion* $f(s)$ *eine ganze transzendente Funktion mit der Ordnungsabszisse* $\Omega = -\infty$ *ist, die also auch die Summierbarkeitsgrenzabszisse* $\Lambda = -\infty$ *besitzt, und deren Ordnungsfunktion* $\mu(\sigma)$ *und Summierbarkeitsfunktion* $\psi(\sigma)$ *durch*

$$\mu(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{für } \sigma \geqq 1 \\ 1-\sigma & \text{für } \sigma \leqq 1 \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \psi(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{für } \sigma \geqq 0 \\ -\sigma & \text{für } \sigma \leqq 0 \end{cases}$$

gegeben sind.

Vorbemerkung. Es genügt bei der Konstruktion unserer Reihe $\sum a_n n^{-s}$ dafür Sorge zu tragen, daß sie die Konvergenzabszisse Λ_0 gleich 0 erhält, und daß die dargestellte Funktion $f(s)$ eine ganze transzendente Funktion mit der Ordnungsabszisse $\Omega = -\infty$ und mit der im Satze angegebenen μ-Funktion wird. In der Tat wird die Reihe dann von selbst die gewünschte ψ-Funktion besitzen; denn eo ipso wird ja $\psi(0) = \psi(\Lambda_0) = 0$ (also auch $\psi(\sigma) = 0$ für $\sigma \geqq 0$), und ferner wird einerseits $\psi(\sigma) \geqq -\sigma$ für $\sigma < 0$ sein (wegen $\psi(\sigma) \geqq \mu(\sigma) - 1$), während andererseits bei keinem $\sigma_0 < 0$ die Ungleichung $\psi(\sigma_0) > -\sigma_0$ bestehen kann (da sonst, wegen

der Konvexität von $\psi(\sigma)$ in Verbindung mit $\psi(0) = 0$, die Ordinate $\psi(\sigma)$ für hinreichend große negative Werte von σ beliebig viel größer als $-\sigma$ ausfallen würde, im Widerspruch zur Ungleichung $\psi(\sigma) \leqq \mu(\sigma) = -\sigma + 1$).

Beweis. Wie in der Einleitung erwähnt, werden bei unserem Konstruktionsverfahren Differenzenbildungen beliebig hoher Ordnung verwendet. In Verallgemeinerung der beiden für die Differenz erster Ordnung üblichen, verschiedenartigen Abschätzungen

$$|n^{-s} - (n+1)^{-s}| \leqq 2n^{-\sigma} \text{ (für } \sigma > 0),$$
$$|n^{-s} - (n+1)^{-s}| \leqq |s| \cdot n^{-(\sigma+1)} \text{ (für } \sigma > -1)$$

treten bei der Differenz m-ter Ordnung

$$\Delta^m(n^{-s}) = n^{-s} - \binom{m}{1}(n+1)^{-s} + \binom{m}{2}(n+2)^{-s} - \cdots + (-1)^m (n+m)^{-s}$$

insgesamt $m+1$ solche Ungleichungen auf (vgl. Bohr, l. c. S. 13), nämlich für jedes $h = 0, 1, \ldots, m$ eine Ungleichung der Form

$$(3) \quad |\Delta^m(n^{-s})| \leqq 2^{m-h} |s| \cdot |s+1| \ldots |s+h-1| \, n^{-(\sigma+h)} \text{ (für } \sigma > -h),$$

wo natürlich für $h = 0$ die rechte Seite einfach $2^m n^{-\sigma}$ bedeutet.

Bei der Konstruktion gehen wir von einer Folge positiver ganzer Zahlen $p_1 < p_2 < p_3 \ldots$ aus, die so stark ins Unendliche wachsen, daß die Reihe $\sum 2^m p_m^{-\varepsilon}$ für jedes $\varepsilon > 0$ konvergiert, und daß überdies für jedes $\varepsilon > 0$ für $M \to \infty$ die beiden Abschätzungen

$$\sum_{m=M+1}^{\infty} 2^m p_m^{-\varepsilon} = o(p_M^{-\varepsilon}) \quad \text{und} \quad 2^{M-1} p_{M-1}^{\varepsilon} = o(p_M^{\varepsilon})$$

gelten (von welchen die letzte übrigens eine unmittelbare Folge der ersten ist). Ferner sollen die Zahlen p_m schon von Anfang an so schnell wachsen, daß gewisse einfache Ungleichungen (wir werden sie nicht explizite aufschreiben) für alle p_m und nicht nur für alle p_m von einer gewissen Stelle an (wo sie nach den obigen an die p_m gestellten Forderungen von selbst erfüllt sein werden) gültig sind; diese unwesentlichen Zusatzforderungen sollen nur dem Zweck dienen zu verhindern, daß bei den unten anzugebenden Gliedergruppierungen Überdeckungen bei den Anfangsgruppen auftreten.

Ferner sei eine Folge positiver ganzer Zahlen $q_1 < q_2 < q_3 \ldots$ festgelegt, welche „fast" so schnell, aber nicht „ganz" so schnell, wie die Folge der p_m ins Unendliche wachsen; es wird bequem sein, etwa

$$q_m = [\tfrac{1}{6} p_m m^{-2}] \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

zu wählen.

Schließlich wird eine Ordinatenfolge $t_1 < t_2 < t_3 \ldots$ einfach durch

$$t_m = \pi p_m \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

festgelegt.

Unsere Dirichletsche Reihe $f(s) = \sum a_n n^{-s}$ wird nunmehr durch Zusammenfassung von (nicht übereinander greifenden) „größeren" Gliedergruppen $\{\ldots\}_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ aufgebaut — von denen die m-te aus insgesamt $(q_m + 1)\cdot(m+1)$ aufeinander folgenden Einzelgliedern $a_n n^{-s}$ besteht — die sich wiederum auf $q_m + 1$ „kleinere" Gliedergruppen $[\ldots]_{m,\nu}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, q_m)$ verteilen und zwar so, daß jede dieser kleineren Gliedergruppen $[\ldots]_{m,\nu}$ bis auf ein komplexes Vorzeichen einfach eine Differenzenbildung m-ter Ordnung ist und also $m+1$ Einzelglieder enthält; genau angegeben ist unsere Reihe folgendermaßen definiert: Es ist

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} = \sum_{m=1}^{\infty} \{\ldots\}_m = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{q_m} [\ldots]_{m,\nu},$$

wobei für $m \geqq 1$, $0 \leqq \nu \leqq q_m$ die eckige Klammer $[\ldots]_{m,\nu}$ die Bedeutung

$$[\ldots]_{m,\nu} = (p_m + \nu(m+1))^{it_m} \cdot \Delta^m (p_m + \nu(m+1))^{-s}$$

hat.

Den Beweis, daß die somit konstruierte Reihe $\sum a_n n^{-s}$ den sämtlichen aufgestellten Forderungen unseres Satzes genügt, teilen wir in drei Schritte ein.

1°. Zunächst zeigen wir, daß $\sum a_n n^{-s}$ die Konvergenzabszisse $\Lambda_0 = 0$ besitzt. Es ist klar, z. B. wegen $a_{p_m} = p_m^{it_m} = 1$ für alle m, daß die Reihe im Punkte $s = 0$ divergiert, es handelt sich also darum zu zeigen, daß die Reihe für $\sigma > 0$ konvergiert. Zu diesem Zwecke zeigen wir zunächst, daß die Reihe unter Beibehaltung der eckigen Klammern für $\sigma > 0$ konvergiert, ja sogar absolut konvergiert; mit Hinblick auf eine spätere Anwendung werden wir sogar beweisen, daß die Reihe unter Beibehaltung der eckigen Klammern nicht nur für $\sigma > 0$, sondern in der ganzen Ebene absolut konvergiert. Um bei beliebig gegebenem ganzzahligem $h > 0$ die absolute Konvergenz in der Halbebene $\sigma > -h + 1$ nachzuweisen, schreiben wir

$$f(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \{\ldots\}_m - \sum_{m=1}^{h} \{\ldots\}_m + \sum_{m=h+1}^{\infty} \{\ldots\}.$$

wo die erste Summe nur endlich viele Glieder $a_n n^{-s}$ enthält. In der zweiten Summe können wir wegen $m > h$ und $\sigma > -h$ jede der in das Glied $\{\ldots\}_m$ eingehenden $q_m + 1$ Klammern $[\ldots]_{m,\nu}$ mit Hilfe der Ungleichung (3) abschätzen und erhalten unmittelbar

$$\begin{aligned} |[\ldots]_{m,\nu}| &= |(p_m + \nu(m+1))^{it_m} \cdot \Delta^m (p_m + \nu(m+1))^{-s}| \\ &\leqq 1 \cdot |s| \ldots |s+h-1|\, 2^{m-h} p_m^{-\sigma-h}; \end{aligned}$$

für die Summe der absoluten Beträge der genannten $q_m + 1$ Klammern $[\ldots]_{m,\nu}$ von $\{\ldots\}_m$ gilt also die Ungleichung

$$\sum_{\nu=0}^{q_m} |[\ldots]_{m,\nu}| \leqq (q_m + 1)\cdot |s| \ldots |s+h-1|\, 2^{m-h} p_m^{-\sigma-h}$$

und somit wegen $q_m < p_m$ a fortiori die Ungleichung

$$(4) \qquad \sum_{\nu=0}^{q_m} |[\ldots]_{m,\nu}| \leqq 2^{-h}|s|\ldots|s+h-1|\,2^m p_m^{-\sigma-h+1},$$

woraus die behauptete absolute Konvergenz in der Halbebene $\sigma > -h+1$ sofort ersichtlich ist, da die Reihe $\sum 2^m p_m^{-\sigma-h+1}$ ja nach Voraussetzung für $\sigma+h-1>0$ konvergiert. Es ist nunmehr leicht zu beweisen, daß die Reihe $\sum a_n n^{-s}$ selbst (also ohne irgendwelche Klammerbildungen) für $\sigma>0$ konvergiert; es genügt ja zu zeigen, daß für $\sigma>0$ die „Abschnitte" in $[\ldots]_{m,\nu}$ für $m\to\infty$ gegen 0 streben, und dies ist klar, weil ja für $\sigma>0$ die Summe der absoluten Beträge sämtlicher Glieder $a_n n^{-s}$ in einer eckigen Klammer $[\ldots]_{m,\nu}$ offenbar

$$\leqq \sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l} p_m^{-\sigma} = 2^m p_m^{-\sigma}$$

ist, welche letztere Größe für $m\to\infty$ gegen 0 strebt.

2°. Demnächst werden wir zeigen, daß $f(s)$ eine ganze transzendente Funktion mit $\Omega = -\infty$ ist, und daß ihre μ-Funktion, die ja für $\sigma > A_0+1 = 1$ (wo die Reihe absolut konvergiert) eo ipso gleich 0 ist, die Ungleichung

$$\mu(\sigma) \leqq 1-\sigma \quad \text{für} \quad \sigma \leqq 1$$

erfüllt. Zu diesem Zwecke genügt es nachzuweisen, daß die Funktion $f(s)$, für jedes ganzzahlige $h>0$, für $\sigma > -h+1$ regulär ist und für jedes $\varepsilon>0$ die Ungleichung

$$f(s) = O(t^h) \quad \text{für} \quad \sigma \geqq -h+1+\varepsilon$$

erfüllt. Denn dann wird ja einerseits $f(s)$ eine ganze transzendente Funktion mit $\Omega = -\infty$ sein, und andererseits wird ja ihre μ-Funktion für jedes $h = 1, 2, \ldots$ und $\varepsilon>0$ die Ungleichung $\mu(-h+1+\varepsilon) \leqq h$ und damit auch (wegen der Stetigkeit von $\mu(\sigma)$) die Ungleichung $\mu(-h+1) \leqq h$ erfüllen, und hieraus folgt sofort weiter (wegen der Konvexität von $\mu(\sigma)$ in Verbindung mit der aus Stetigkeitsgründen gültigen Gleichung $\mu(1) = 0$), daß die gewünschte Ungleichung $\mu(\sigma) \leqq 1-\sigma$ für alle $\sigma \leqq 1$ besteht. Wie in 1°. teilen wir die Reihe in die zwei Summanden

$$f(s) = \sum_{m=1}^{h}\{\ldots\}_m + \sum_{m=h+1}^{\infty}\{\ldots\}_m = f_1(s)+f_2(s)$$

ein, wo die erste Summe mit nur endlich vielen Gliedern $a_n n^{-s}$ natürlich eine ganze transzendente Funktion $f_1(s)$ darstellt, die in jeder Halbebene $\sigma>\sigma_0$ beschränkt ist, so daß es nur darauf ankommt zu zeigen, daß die zweite Summe eine in der Halbebene $\sigma > -h+1$ reguläre Funktion darstellt, die für $\sigma \geqq -h+1+\varepsilon$ gleich $O(|t|^h)$ ist. Indem wir für jedes $m>h$ die oben gefundene, sogar für $\sigma > -h$

gültige, Ungleichung (4) verwenden, erhalten wir für $\sigma \geqq -h+1+\varepsilon$ die Ungleichung

$$|\{\ldots\}_m| \leqq \sum_{\nu=0}^{q_m} |[\ldots]_{m,\nu}| \leqq 2^{-h}|s|\ldots|s+h-1|\,2^m p_m^{-\varepsilon},$$

woraus sich auf Grund der Konvergenz von $\sum 2^m p_m^{-\varepsilon}$ sofort ergibt, sowohl daß die Reihe $\sum_{h+1}^{\infty}\{\ldots\}_m$ in jedem beschränkten Teil der Halbebene $\sigma \geqq -h+1+\varepsilon$ gleichmäßig konvergiert und somit eine für $\sigma > -h+1$ reguläre Funktion $f_2(s)$ darstellt, als auch daß diese Funktion etwa für $-h+1+\varepsilon \leqq \sigma \leqq 2$ (und damit natürlich von selbst in der ganzen Halbebene $\sigma \geqq -h+1+\varepsilon$) der gewünschten Ungleichung

$$|f_2(s)| \leqq |s|\ldots|s+h-1|\,2^{-h}\sum_{m=h+1}^{\infty} 2^m p_m^{-\varepsilon} = O(|t|^h)$$

genügt.

3°. Es fehlt aber noch die Hauptsache, nämlich der Nachweis, daß

$$\mu(\sigma) \geqq 1-\sigma \quad \text{für} \quad \sigma < 1.$$

Es sei σ_0 eine beliebige feste Abszisse <1; wir betrachten das Verhalten von $f(s)$ in den Punkten $s_M = \sigma_0 + i t_M$, wo t_M die oben genannte Ordinate πp_M bedeutet, und werden beweisen, daß für alle hinreichend großen M sogar die Ungleichung

$$|f(s_M)| > t_M^{1-\sigma_0} \tag{5}$$

besteht. Zu diesem Zwecke bestimmen wir zunächst — indem wir von der in der ganzen Ebene gültigen Darstellung $f(s) = \sum\{\ldots\}_m$ ausgehen — ein positives ganzes h, so daß $1-h < \sigma_0 < 1$, und schreiben für $M > h$

$$f(s_M) = \sum_{m=1}^{M-1}\{\ldots\}_m + \{\ldots\}_M + \sum_{m=M+1}^{\infty}\{\ldots\}_m = A_M(s_M) + G_M(s_M) + R_M(s_M);$$

wir werden nun zeigen, daß sowohl der „Anfang“ $A_M(s_M)$ als auch der „Rest“ $R_M(s_M)$ für $M \to \infty$ gleich $o(t_M^{1-\sigma_0})$ ist, während das M-te „Glied“ $G_M(s_M)$ für hinreichend großes M absolut genommen größer als $2t_M^{1-\sigma_0}$ ausfällt, womit natürlich die gewünschte Ungleichung (5) dargetan ist.

1) Für den „Anfang“ $A_M(s_M)$ ergibt sich bei einer groben Abschätzung, da der absolute Betrag jedes darin vorkommenden Koeffizienten $a_n \neq 0$ gleich einem Binomialkoeffizienten $\binom{m}{l}$ mit $m \leqq M-1$ und daher $\leqq 2^{M-1}$ ist,

$$|A_M(s_M)| \leqq 2^{M-1}\sum_{n=1}^{p_{M-1}+Mq_{M-1}+M-1} n^{-\sigma_0}$$

und hieraus weiter, da für hinreichend großes M die obere Summationsschranke $p_{M-1} + M q_{M-1} + M - 1$ kleiner als z. B. $2 p_{M-1}$ ist.

$$|A_M(s_M)| \leqq 2^{M-1} \sum_{n=1}^{2 p_{M-1}} n^{-\sigma_0}$$

also wegen $\sigma_0 < 1$

$$A_M(s_M) = O(2^{M-1} p_{M-1}^{1-\sigma_0}) = o(p_M^{1-\sigma_0}) = o(t_M^{1-\sigma_0}).$$

2) Für den „Rest" $R_M(s_M)$ erhalten wir, wiederum unter Benutzung der für $m > h$ und $\sigma > -h+1$ (sogar $\sigma > -h$) gültigen Ungleichung (4), die Abschätzung

$$|R_M(s_M)| \leqq \sum_{m=M+1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{q_m} |\ldots|_{m,\nu} \leqq \sum_{m=M+1}^{\infty} 2^{-h} |s_M \ldots s_M + h - 1| 2^m p_m^{-\sigma_0 - h + 1}$$

$$= 2^{-h} |s_M| \ldots |s_M + h - 1| \sum_{m=M+1}^{\infty} 2^m p_m^{-\sigma_0 - h + 1}$$

also

$$R_M(s_M) = O(t_M^h) \cdot o(p_M^{-\sigma_0 - h + 1}) = o(t_M^h \cdot t_M^{-\sigma_0 - h + 1}) = o(t_M^{1-\sigma_0}).$$

3) Alles kommt also darauf an zu zeigen, daß für hinreichend großes M die Ungleichung

$$|G_M(s_M)| > 2 t_M^{1-\sigma_0}$$

besteht. Der Grund für das Bestehen dieser Ungleichung liegt darin, daß die sämtlichen (nach der Wahl von q_m relativ vielen) in $G_M(s_M)$ auftretenden Glieder $a_n n^{-s}$, nämlich insgesamt $(q_M + 1)(M + 1)$ verteilt in $q_M + 1$ Klammern $|\ldots|_{M,\nu}$ mit $M + 1$ Gliedern in jeder Klammer, für ein hinreichend großes M alle „fast gleichgerichtet" sind; genau gesprochen liegen sie alle in dem Winkelraum $-\frac{\pi}{3} < \tau < \frac{\pi}{3}$. Indem wir einen Augenblick damit warten, diese letzte Behauptung zu beweisen, wollen wir zunächst zeigen, daß wir mit dem Beweise fertig sind, falls sie dargetan ist. In der Tat ergibt sich daraus für hinreichend großes M, weil die Summe der in jeder der $q_M + 1$ eckigen Klammern auftretenden Binomialkoeffizienten gleich 2^M ist, und jedes auftretende n dem Intervall $p_M \leqq n \leqq p_M + (M+1) q_M + M$, also a fortiori dem Intervall $p_M \leqq n \leqq 2 p_M$ angehört,

$$|G_M(s_M)| \geqq \Re G_M(s_M) \geqq \cos\frac{\pi}{3} \cdot \{(q_M + 1) 2^M\} \cdot \operatorname*{Min}_{p_M \leqq n \leqq 2 p_M} n^{-\sigma_0}$$

$$\geqq \frac{1}{2}(q_M + 1) 2^M \cdot \frac{1}{2} p_M^{-\sigma_0} \geqq \frac{1}{4} 2^M \left(\frac{1}{6} p_M M^{-2}\right) p_M^{-\sigma_0} = \frac{1}{24} 2^M M^{-2} \left(\frac{t_M}{\pi}\right)^{1-\sigma_0},$$

welche letztere Größe ja für große M (reichlich) größer als $2 t_M^{1-\sigma_0}$ ist.

Es bleibt übrig, die — entscheidende — Tatsache zu beweisen, daß die sämtlichen in $G_M(s_M)$ auftretenden Glieder $a_n n^{-s_M}$ in dem

Winkelraum $-\frac{\pi}{3} < r < \frac{\pi}{3}$ gelegen sind. Daß dies der Fall ist, rührt natürlich von den getroffenen Festlegungen der komplexen Vorzeichen der auftretenden Koeffizienten a_n her. Wir betrachten eine beliebige der $q_M + 1$ Klammern $[\ldots]_{M,\nu}$

$$(p_M + \nu(M+1))^{it_M} \cdot \Delta^M (p_M + \nu(M+1))^{-s_M} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, q_M).$$

Indem wir zur Abkürzung die Zahl $p_M + \nu(M+1)$ mit $r = r(M, \nu)$ bezeichnen, erhalten wir

$$[\ldots]_{M,\nu} = r^{it_M}\left(r^{-s_M} - \binom{M}{1}(r+1)^{-s_M} + \cdots + (-1)^M \binom{M}{M}(r+M)^{-s_M}\right).$$

Das Winkelargument des einzelnen Gliedes

$$r^{it_M}(-1)^\lambda \binom{M}{\lambda}(r+\lambda)^{-(\sigma_0 + it_M)} \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, M)$$

ist, wenn wir es der Bequemlichkeit halber mit entgegengesetztem Vorzeichen nehmen, mod 2π durch

$$t_M \log(r+\lambda) - t_M \log r - \lambda\pi = t_M \log\left(1 + \frac{\lambda}{r}\right) - \lambda\pi$$

gegeben. Wir werden zeigen, daß diese letzte Größe sogar selbst (und nicht nur mod 2π betrachtet) zwischen $-\frac{\pi}{3}$ und $\frac{\pi}{3}$ liegt, also daß

$$\lambda\pi - \frac{\pi}{3} < t_M \log\left(1 + \frac{\lambda}{r}\right) < \lambda\pi + \frac{\pi}{3} \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, M)$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt (da ja die Ungleichungen für $\lambda = 0$ trivialerweise erfüllt sind), daß

$$\lambda\pi\left(1 - \frac{1}{3\lambda}\right) < t_M \log\left(1 + \frac{\lambda}{r}\right) < \lambda\pi\left(1 + \frac{1}{3\lambda}\right) \qquad (\lambda = 1, \ldots, M);$$

etwas schärfer wollen wir zeigen, daß

$$\lambda\pi\left(1 - \frac{1}{3M}\right) < t_M \log\left(1 + \frac{\lambda}{r}\right) < \lambda\pi \qquad (\lambda = 1, \ldots, M).$$

Was die Ungleichung rechts anbelangt, so sind wir sofort fertig; denn wegen $\log(1+x) < x$ für $0 < x < 1$ und $r \geqq p_M$ haben wir ja

$$t_M \log\left(1 + \frac{\lambda}{r}\right) < t_M \frac{\lambda}{r} = \pi p_M \frac{\lambda}{r} \leqq \pi p_M \frac{\lambda}{p_M} = \lambda\pi.$$

Um die Ungleichung links, d. h.

$$t_M \log\left(1 + \frac{\lambda}{r}\right) > \lambda\pi\left(1 - \frac{1}{3M}\right) \tag{6}$$

darzutun, müssen wir etwas vorsichtiger rechnen. Wegen

$\log(1+x) > x - x^2 = x(1-x)$ für $0 < x < 1$ und $p_M \leqq r \leqq p_M + (M+1)q_M$

finden wir hier für hinreichend großes M

$$t_M \log\left(1+\frac{\lambda}{r}\right) > t_M \frac{\lambda}{r}\left(1-\frac{\lambda}{r}\right) = \pi\lambda \frac{p_M}{r}\left(1-\frac{\lambda}{r}\right)$$

$$\geqq \pi\lambda \frac{p_M}{p_M+(M+1)q_M}\cdot\left(1-\frac{M}{p_M}\right) = \pi\lambda\left(1-\frac{(M+1)q_M}{p_M+(M+1)q_M}\right)\cdot\left(1-\frac{M}{p_M}\right)$$

$$> \pi\lambda\left(1-\frac{(M+1)q_M}{p_M}\right)\left(1-\frac{M}{p_M}\right) > \pi\lambda\left(1-\frac{(M+1)q_M+M}{p_M}\right) > \pi\lambda\left(1-\frac{2Mq_M}{p_M}\right),$$

welche letzte Größe wegen $q_M \leqq \frac{1}{6} p_M M^{-2}$ wiederum größer als

$$\pi\lambda\left(1-\frac{2M}{6M^2}\right) = \pi\lambda\left(1-\frac{1}{3M}\right)$$

ist. Hiermit ist die obige Ungleichung (6) und damit unser Satz bewiesen.

§ 2.

Eine Anwendung auf die Multiplikation Dirichletscher Reihen.

Wie in der Einleitung erwähnt, gilt für zwei für $\sigma > 0$ konvergente Dirichletsche Reihen, daß ihre Produktreihe jedenfalls für $\sigma > \frac{1}{2}$ konvergiert, und daß diese Zahl $\frac{1}{2}$ die bestmögliche (d. h. die kleinstmögliche) ist. Ein entsprechendes allgemeines Problem läßt sich natürlich statt für Konvergenz für Summierbarkeit beliebiger Ordnung aufstellen. Es soll hier nur ein charakteristischer Spezialfall dieses allgemeinen Problems behandelt werden.

Aus bekannten Resultaten läßt sich leicht der folgende Satz ableiten:

Satz A. *Es sei* $0 \leqq \alpha_1 \leqq \alpha_2$, *und es seien* $\sum a_n' n^{-s}$ *und* $\sum a_n'' n^{-s}$ *zwei Dirichletsche Reihen, von denen die erste für* $\sigma > 0$ *von der* α_1*-ten Ordnung, die zweite für* $\sigma > 0$ *von der* α_2*-ten Ordnung C-summierbar ist. Dann ist die Produktreihe* $\sum A_n n^{-s}$ $(A_n = \sum a_m' a_l'' \text{ für } ml = n)$ *jedenfalls für*

$$\sigma > \begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2+1) & \text{im Falle } \alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \alpha_1+1 \\ \alpha_2 & \text{im Falle } \alpha_2 \geqq \alpha_1+1 \end{cases}$$

konvergent.

Beweis. Aus den Voraussetzungen über die Summierbarkeit von $\sum a_n' n^{-s}$ und $\sum a_n'' n^{-s}$ folgt (vgl. HR, S. 57), daß $\sum a_n' n^{-s}$ jedenfalls für $\sigma > \alpha_1$ und $\sum a_n'' n^{-s}$ für $\sigma > \alpha_2$ konvergieren. Wir unterscheiden nunmehr zwei Fälle.

1°. Es ist $\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \alpha_1 + 1$. In diesem Falle gilt nach Stieltjes-Landau (vgl. HR, S. 66), daß die Produktreihe $\sum A_n n^{-s}$ für $\sigma > \frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2+1)$ konvergiert.

2°. Es ist $\alpha_2 \geqq \alpha_1 + 1$. Da hier die eine Reihe $\sum a_n'' n^{-s}$ für $\sigma > \alpha_2$ konvergiert, die andere $\sum a_n' n^{-s}$ für $\sigma > \alpha_2 (\geqq \alpha_1 + 1)$ sogar absolut

konvergiert, gilt (nach Mertens, vgl. HR. S. 63), daß die Produktreihe $\sum A_n n^{-s}$ gewiß für $\sigma > \alpha_2$ konvergiert.

Damit ist der Satz bewiesen.

Durch Heranziehung des in § 1 konstruierten Beispiels soll nunmehr — in Verallgemeinerung des oben erwähnten Falles $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, wo von Konvergenz die Rede ist — gezeigt werden, daß die in Satz A angegebene obere Schranke für die Konvergenzabszisse der Produktreihe tatsächlich die bestmögliche ist.

Satz B. *Es seien die beiden nicht negativen Zahlen* α_1 *und* $\alpha_2 \geqq \alpha_1$ *beliebig gegeben, und es sei*

$$\Phi(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 + 1) & \text{im Falle} \quad \alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \alpha_1 + 1 \\ \alpha_2 & \text{im Falle} \quad \alpha_2 \geqq \alpha_1 + 1 \end{cases}$$

gesetzt. Dann gibt es dazu zwei Dirichletsche *Reihen* $\sum a'_n n^{-s}$ *und* $\sum a''_n n^{-s}$, *von denen die erste für* $\sigma > 0$ *von der* α_1*-ten, die zweite für* $\sigma > 0$ *von der* α_2*-ten Ordnung C-summierbar ist, derart daß die Konvergenzabszisse* A_0 *der Produktreihe* $\sum A_n n^{-s}$ *genau durch die Gleichung* $A_0 = \Phi(\alpha_1, \alpha_2)$ *gegeben ist.*

Beweis. Es sei $f(s) = \sum a_n n^{-s}$ die Dirichletsche Reihe aus § 1, eventuell nach Hinzufügung eines (siehe unten) passend gewählten konstanten Gliedes a_1. Da $\sum a_n n^{-s}$ für $\sigma > -\alpha_1$ und $\sigma > -\alpha_2$ von der α_1-ten bzw. α_2-ten Ordnung summierbar ist, werden die beiden, durch einfache Verschiebungen der Abszissenachse entstandenen, Dirichletschen Reihen

$$f_1(s) = f(s - \alpha_1) = \sum a'_n n^{-s} \quad \text{und} \quad f_2(s) = f(s - \alpha_2) = \sum a''_n n^{-s}$$

für $\sigma > 0$ von der α_1-ten bzw. α_2-ten Ordnung summierbar sein. Ferner ergibt sich sofort, daß die μ-Funktionen dieser beiden ganzen transzendenten Funktionen $f_1(s)$ und $f_2(s)$ durch

$$\mu_1(\sigma) = \begin{cases} 0 \text{ für } \sigma \geqq \alpha_1 + 1 \\ \alpha_1 + 1 - \sigma \text{ für } \sigma \leqq \alpha_1 + 1 \end{cases} \text{ und } \mu_2(\sigma) = \begin{cases} 0 \text{ für } \sigma \geqq \alpha_2 + 1 \\ \alpha_2 + 1 - \sigma \text{ für } \sigma \leqq \alpha_2 + 1 \end{cases}$$

gegeben sind. Wir bilden die Produktreihe $\sum A_n n^{-s}$ der beiden Reihen $\sum a'_n n^{-s}$ und $\sum a''_n n^{-s}$. Für die μ-Funktion $M(\sigma)$ der durch die Produktreihe dargestellten ganzen transzendenten Funktion $F(s) = f(s - \alpha_1) \cdot f(s - \alpha_2)$ gilt offenbar die Ungleichung $M(\sigma) \leqq \mu_1(\sigma) + \mu_2(\sigma)$. Wir werden zeigen, daß — wenigstens bei passender Wahl des oben erwähnten konstanten Gliedes a_1 — die μ-Funktion $M(\sigma)$ von $F(s)$ durch die Gleichung

$$M(\sigma) = \mu_1(\sigma) + \mu_2(\sigma)$$

bestimmt wird. Für $\sigma \geqq \alpha_2 + 1$, wo sowohl $\mu_1(\sigma)$ als auch $\mu_2(\sigma)$ gleich 0 sind, ist dies klar. Für jedes $\sigma < \alpha_1 + 1$ (und daher aus Stetigkeitsgründen auch für $\sigma = \alpha_1 + 1$), wo sowohl $\mu_1(\sigma)$ als auch $\mu_2(\sigma)$ positiv sind, folgt es daraus, daß wir Ordinaten $t = t_m \to \infty$ finden können

(nämlich die in § 1 betrachteten von der Abszisse unabhängigen Zahlen $t_m = \pi p_m$), für welche die beiden Funktionen $f_1(\sigma + it)$ und $f_2(\sigma + it)$ gleichzeitig „groß" werden, d. h. von der Ordnung $t^{\mu_1(\sigma)}$ bzw. $t^{\mu_2(\sigma)}$. Um schließlich (falls $\alpha_1 < \alpha_2$ ist) die Gültigkeit der Gleichung $M(\sigma) = \mu_1(\sigma) + \mu_2(\sigma)$ im Zwischenintervall $\alpha_1 + 1 < \sigma < \alpha_2 + 1$, wo $\mu_1(\sigma) = 0$, $\mu_2(\sigma) > 0$ ist, darzutun, wenden wir folgenden kleinen Kunstgriff an. Zunächst sei bemerkt, daß es wegen der Konvexität von $M(\sigma)$ und der Linearität von $\mu_2(\sigma)$ offenbar genügt, die Relation $M(\sigma) = \mu_1(\sigma) + \mu_2(\sigma) = \mu_2(\sigma)$ nur für ein einziges σ_0 des Intervalles $\alpha_1 + 1 < \sigma < \alpha_2 + 1$ zu beweisen. Eine Ungleichung $M(\sigma_0) < \mu_2(\sigma_0)$ könnte aber nur dann eintreffen, wenn — grob ausgedrückt — für alle Werte von t, für welche $f_2(\sigma_0 + it)$ „groß" ist, zugleich $f_1(\sigma + it)$ „klein" wäre. Da aber die Reihe $\sum a'_n n^{-s}$ für $\sigma = \sigma_0 (> \alpha_1 + 1)$ absolut konvergiert, können wir dies sofort verhindern, da wir ja durch Wahl eines hinreichend großen konstanten Gliedes $a_1 (= a'_1)$ dafür sorgen können, daß der absolute Betrag der Funktion $f_1(\sigma_0 + it)$ auf der ganzen Geraden $\sigma = \sigma_0$ etwa > 1 ist.

Es ist nunmehr unmittelbar zu beweisen, daß die Konvergenzabszisse A_0 der Produktreihe $\sum A_n n^{-s}$ gleich der im Satze angegebenen Zahl $\Phi(\alpha_1, \alpha_2)$ ist, oder — was ja nach dem Satze A genügt — daß $A_0 \geqq \Phi(\alpha_1, \alpha_2)$ ist. Denn die Reihe $\sum A_n n^{-s}$ kann ja gewiß nicht weiter nach links konvergieren, als die μ-Funktion $M(\sigma) \leqq 1$ bleibt, und die Zahl $\Phi(\alpha_1, \alpha_2)$ gibt gerade die Abszisse desjenigen Punktes an, in welchem der durch die M-Kurve

$$M(\sigma) = \mu_1(\sigma) + \mu_2(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{für } \sigma \geqq \alpha_2 + 1 \\ \alpha_2 + 1 - \sigma & \text{für } \alpha_1 + 1 \leqq \sigma \leqq \alpha_2 + 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 2 - 2\sigma & \text{für } \sigma \leqq \alpha_1 + 1 \end{cases}$$

dargestellte gebrochene Streckenzug von einer horizontalen Geraden von der Höhe 1 über der σ-Achse geschnitten wird.

(Eingegangen am 14. Dezember 1949.)

Generalized Determinants of Vandermonde.

Oskar Perron to his 70th birthday on May 7, 1950.

By

I. A. Barnett in Cincinnati (Ohio, USA)
and
C. W. Mendel in Urbana (Illinois, USA).

This paper is concerned with properties of determinants whose elements consist of certain of the elements of powers of a given square matrix A. When A is a diagonal matrix, one of these determinants reduces to the classical Vandermonde.

The paper is divided into two parts. In Part I some simple factorizations of such generalized Vandermondes are derived by means of the Hamilton-Cayley equation for the matrix A. We next point out some relations between the determinants here considered and certain Jacobians. In particular, we prove that the Jacobian of the coefficients of the characteristic equation of A with respect to any set of n elements is, apart from sign, one of the generalized Vandermondes.

The main problem of this paper is considered in Part II. The result proved there we shall call the functional independence theorem which we now state explicitly.

If A is a square matrix of order n, the Jacobian of the n traces of $A, A^2, \ldots, A^n$, with respect to each set of n distinct elements of A, at least one of which is a diagonal element, is never identically zero in the n^2 elements of A.

This theorem tells us that the traces of the powers of a square matrix are functionally independent with respect to every distinct set of n elements of the matrix, provided at least one of these elements is a diagonal element. It is believed that this is the first time that such a strong type of functional independence has been stated.

The proof of this theorem as originally given by Barnett and Mendel is quite long and requires a reduction of the sets of elements of A involved to certain types for each of which a matrix can be exhibited to show that the corresponding Jacobian is different from zero. When Barnett was in Munich in 1946, he proposed this problem to Professor Perron who devised a proof by induction which was considerably shorter and more elegant than the one originally given. We have decided to incorporate this latter proof in this paper.

PART I.

Simple Properties of Vandermondes.

1. Generalized determinants of Vandermonde. Let $A = \|a_{ij}\|$, $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ be a square matrix whose elements are independent real variables. We shall denote its determinant by $D(A)$. As usual, let $a_{ij}^{(m)}$ stand for the element in the i-th row and j-th column of the m-th power of the matrix A.

Consider next the determinant

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} a_{r_1 s_1}^{(m_1)} & a_{r_2 s_2}^{(m_1)} & \ldots & a_{r_n s_n}^{(m_1)} \\ a_{r_1 s_1}^{(m_2)} & a_{r_2 s_2}^{(m_2)} & \ldots & a_{r_n s_n}^{(m_2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r_1 s_1}^{(m_n)} & a_{r_2 s_2}^{(m_n)} & \ldots & a_{r_n s_n}^{(m_n)} \end{vmatrix},$$

where $r_1, r_2, \ldots, r_n$ and $s_1, s_2, \ldots, s_n$ are arbitrary integers on the range 1 to n, equal or unequal, and where $0 \leqq m_1 < m_2 < \cdots < m_n$ are arbitrary integers. Such a determinant will be called a *generalized determinant of* VANDERMONDE and will be denoted by $V_s^r(A; m_1, m_2, \ldots, m_n)$, where the indices r and s stand for the two sets of integers above. We shall always suppose that the n pairs (r_i, s_i) are all distinct since otherwise the determinant (1) would have duplicate columns and would therefore be identically zero.

An immediate property of such determinants is that

$$V_s^r(A; m_1, m_2, \ldots, m_n) = V_r^s(A'; m_1, m_2, \ldots, m_n)$$

where A' is the transpose of A. This follows from the fact that the transpose of a power of a matrix is equal to the same power of the transpose matrix.

The determinant $V_s^r(A; 0, 1, \ldots, n-1)$ which will be denoted simply by $V_s^r(A)$, will be called a *principal* generalized VANDERMONDE. It is with these latter that we shall concern ourselves almost exclusively in the later sections. In particular, if A is a diagonal matrix, $V_s^r(A)$ reduces at once to the classical determinant of VANDERMONDE in the elements of the diagonal of A.

2. Some factorizations of the Vandermonde. From the HAMILTON-CAYLEY equation which a square matrix satisfies, there follow some simple factorizations of the generalized VANDERMONDE, and these will now be given.

Theorem 1. *If* $m \geqq 0$ *the equation*

$$V_s^r(A; m+1, m+2, \ldots, m+n) = D(A)\, V_s^r(A; m, m+1, \ldots, m+n-1)$$

holds identically in the elements of A.

If $m = 0$ this reduces to

$$V_s^r(A; 1, 2, \ldots, n) = D(A)\, V_s^r(A).$$

Proof. If we denote by $f(\lambda)$ the function $D(\lambda I - A)$ we know that

$$f(A) \equiv A^n + c_1 A^{n-1} + \cdots + c_n I = 0, \tag{2}$$

where $c_n = (-1)^n D(A)$. From equation (2) we have

$$A^{m+n} + c_1 A^{m+n-1} + \cdots + c_n A^m = 0, \tag{3}$$

or

$$a_{ij}^{(m+n)} + c_1 a_{ij}^{(m+n-1)} + \cdots + c_n a_{ij}^{(m)} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{3 a}$$

If to the last row of $V_s^r(A;\ m+1, m+2, \ldots, m+n)$ we add c_{n-1} times the first row, c_{n-2} times the second row, ..., c_1 times the $(n-1)$st row, then, by means of equations (3 a) and $(n-1)$ interchanges of adjacent rows, we find

$$V_s^r(A;\ m+1, m+2, \ldots, m+n) = (-1)^n c_n V_s^r(A;\ m, m+1, \ldots, m+n-1),$$

which proves Theorem 1.

By means of Theorem 1 we can prove the following extension:

Theorem 2. *If* $0 < m_1 < m_2 < \cdots < m_n$ *the equation*

$$V_s^r(A;\ m_1, m_2, \ldots, m_n) = D(A)\, V_s^r(A;\ m_1 - 1, m_2 - 1, \ldots, m_n - 1)$$

is an identity in the elements of A.

Proof. If a certain m_i is less than $m_1 + n$ then A^{m_i} occurring in the set $A^{m_1}, A^{m_1+1}, \ldots, A^{m_1+n-1}$ is obviously a linear combination of these matrices. If $m_i \geqq m_1 + n$ we consider equations (3) with $m = m_1$, $m = m_1 + 1$, ..., $m = m_i - n$. By means of these equations we can express A^{m_i} as a linear combination of the above set $A^{m_1}, A^{m_1+1}, \ldots, A^{m_1+n-1}$. The coefficients entering in this linear combination are polynomials in $c_1, c_2, \ldots, c_n$ whose numerical coefficients depend only on the difference $m_i - m_1$. Making use of these linear relationships for $i = 1, 2, \ldots, n$ together with elementary operations on determinants, we see that

$$V_s^r(A;\ m_1, m_2, \ldots, m_n) = f(c_1, c_2, \ldots, c_n)\, V_s^r(A;\ m_1, m_1 + 1, \ldots, m_1 + n - 1),$$

where we emphasize again that $f(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ is a polynomial in $c_1, c_2, \ldots, c_n$ with numerical coefficients depending only on the differences $m_2 - m_1, m_3 - m_1, \ldots, m_n - m_1$. Then by repeated use of Theorem 1 we have at once

$$V_s^r(A;\ m_1, m_2, \ldots, m_n) = f(c_1, c_2, \ldots, c_n)\, [D(A)]^{m_1} V_s^r(A). \tag{4}$$

Also by the same procedure, we obtain

$$V_s^r(A;\ m_1 - 1, m_2 - 1, \ldots, m_n - 1) = f(c_1, c_2, \ldots, c_n)\, [D(A)]^{m_1 - 1} V_s^r(A), \tag{5}$$

where $f(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ is exactly the same polynomial as in equation (4), since $(m_i - 1) - (m_1 - 1) = m_i - m_1$. Hence, multiplying (5) by $D(A)$ and subtracting from (4), we obtain Theorem 2.

From equation (4) we deduce at once the additional result: *If* $r_1 \neq s_1, r_2 \neq s_2, \ldots, r_n \neq s_n$, *simultaneously, then* $V_s^r(A; m_1, m_2, \ldots, m_n)$ *is identically zero in the* n^2 *elements of* A. This follows from (4) because, under the hypotheses, the elements of the first row of the principal VANDERMONDE $V_s^r(A)$ are all zero.

It would not be of interest to consider a determinant of the form (1) with more rows and columns than the order of the matrix A since, in this case, the determinant would vanish identically, as is seen at once by the use of the HAMILTON-CAYLEY equation.

As another immediate consequence of Theorem 2, we have the result that *the* VANDERMONDE (1) *for a skew-symmetric matrix* A *of odd order, for which* $m_1 \geqq 1$, *is identically zero in the elements of* A.

We shall conclude this section with a proof of the factorization theorem 2 by an alternate method which depends on certain formulas to be found in *WEDDERBURN's Lectures on Matrices* (1930).

We have denoted by $f(\lambda)$ the characteristic function $D(\lambda I - A)$ for the matrix A. Let $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ be the zeros[1]) of $f(\lambda)$ and define the n functions

$$f_i(\lambda) = f(\lambda)/(\lambda - \lambda_i) f'(\lambda_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

where $f'(\lambda)$ is the derivative of $f(\lambda)$. Then by formula (14) page 26 of WEDDERBURN

$$A^m = \lambda_1^m f_1(A) + \lambda_2^m f_2(A) + \cdots + \lambda_n^m f_n(A) \quad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

Let f_{ijk} denote the element in the i-th row and j-th column of the matrix $f_k(A)$ so that we may write the last equation in the form

$$a_{ij}^{(m)} = \lambda_1^m f_{ij1} + \lambda_2^m f_{ij2} + \cdots + \lambda_n^m f_{ijn}.$$

Using these expressions for $a_{ij}^{(m)}$ and the usual rule for matrix multiplication, we obtain

$$V_s^r(A; m_1, m_2, \ldots, m_n) = \Delta(m_1, m_2, \ldots, m_n) F,$$

where

$$\Delta(m_1, m_2, \ldots, m_n) = \begin{vmatrix} \lambda_1^{m_1} & \lambda_2^{m_1} & \ldots & \lambda_n^{m_1} \\ \lambda_1^{m_2} & \lambda_2^{m_2} & \ldots & \lambda_n^{m_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_1^{m_n} & \lambda_2^{m_n} & \ldots & \lambda_n^{m_n} \end{vmatrix}, \qquad F = \begin{vmatrix} f_{r_1 s_1 1} & f_{r_2 s_2 1} & \ldots & f_{r_n s_n 1} \\ f_{r_1 s_1 2} & f_{r_2 s_2 2} & \ldots & f_{r_n s_n 2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{r_1 s_1 n} & f_{r_2 s_2 n} & \ldots & f_{r_n s_n n} \end{vmatrix}.$$

The determinant $\Delta(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ is *HEINEMAN's generalization of the classical* VANDERMONDE (Generalized VANDERMONDE Determinants, Trans., Amer. Math. Soc., vol. 31 (1929), p. 464) and, in our notation would be given by $V_s^r(A; m_1, m_2, \ldots, m_n)$ with A a diagonal matrix and $r = s = (1, 2, \ldots, n)$.

[1]) The requirement that the roots $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ be distinct causes no difficulty here since our matrix A has n^2 indeterminates for elements.

For theorem 2 we had the restrictions $0 < m_1 < m_2 < \cdots < m_n$ so that we may write the above equation in the form

$$V_s^r(A; m_1, m_2, \ldots, m_n) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n \Delta(m_1 - 1, m_2 - 1, \ldots, m_n - 1) F$$

Recalling that $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n = D(A)$ and using row by column multiplication on $\Delta(m_1 - 1, m_2 - 1, \ldots, m_n - 1)$ and F, we obtain theorem 2.

From the formula $V_s^r(A; m_1, m_2, \ldots, m_n) = \Delta(m_1, m_2, \ldots, m_n) F$ we also find

$$\begin{aligned} V_s^r(A; m_1, m_2, \ldots, m_n) &= (\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n)^{m_1} \Delta(0, m_2 - m_1, \ldots, m_n - m_1) \cdot F \\ &= \{D(A)\}^{m_1} \Delta(0, m_2 - m_1, \ldots, m_n - m_1) \Delta_0^{-1} \Delta_0 \cdot F \\ &= \{D(A)\}^{m_1} \{\Delta(0, m_2 - m_1, \ldots, m_n - m_1)\} V_s^r(A), \end{aligned}$$

where $\Delta_0 = \Delta(0, 1, 2, \ldots, n-1)$, Δ_0^{-1} is the inverse of Δ_0 and where, on the right, we have again used row by column multiplication on Δ_0 and F to obtain $V_s^r(A)$. We observe that $\Delta(0, m_2 - m_1, \ldots, m_n - m_1)/\Delta_0$ is a symmetric function of $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ since both numerator and denominator are alternating functions of these variables. Besides, each of the $C(n, 2)$ distinct factors $\lambda_i - \lambda_j$ whose product is, of course, the determinant Δ_0, is also a factor of the numerator and, hence this quotient is a symmetric polynomial in $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. It follows then by a well known result on symmetric functions that the quotient $\Delta(0, m_2 - m_1, \ldots, m_n - m_1)/\Delta_0$ is a polynomial in the coefficients $c_1, c_2, \ldots, c_n$ of the characteristic equation for A. Thus, we have another proof of the formula (4) of this section.

3. Some further properties of Vandermonde. In this section we shall point out that certain JACOBIANS and related determinants may be written as generalized VANDERMONDES.

We shall first introduce some formulas on the derivatives of the elements of the powers of a matrix. Unless otherwise specified, let us agree that all indices shall have the range 1 to n. For the rest of this section we shall employ the usual summation convention on repeated Roman indices.

For all positive integers m we have $a_{ij}^{(m)} = a_{iu_1} a_{u_1 u_2} \ldots a_{u_{m-1} j}$ from which formula is obtained

$$\frac{\partial a_{ij}^{(m)}}{\partial a_{uv}} = \sum_{\alpha=0}^{m-1} a_{iu}^{(m-1-\alpha)} a_{vj}^{(\alpha)}. \tag{6}$$

It is also readily seen that for any pair of non-negative integers α, β, we have $a_{ij}^{(\alpha+\beta)} = a_{iu}^{(\alpha)} a_{uj}^{(\beta)}$.

If we define the linear operator Ω_k by means of

$$\Omega_k f \equiv a_{uv}^{(k)} \frac{\partial f}{\partial a_{uv}},$$

then, on multiplying (6) by $a_{uv}^{(k)}$ and summing on u and v we obtain

$$\Omega_k a_{ij}^{(m)} = m a_{ij}^{(k+m-1)}.$$

In particular, if we apply the operators Ω_0 and Ω_1 to $V_s^r(A)$ we find

$$\Omega_0 V_s^r(A) = 0, \quad \Omega_1 V_s^r(A) = \frac{n(n-1)}{2} V_s^r(A). \tag{7}$$

The second equation is merely EULER's relation for the homogeneous function $V_s^r(A)$. If in equation (6) we set $i = j$ and sum, we obtain

$$\frac{\partial t_m}{\partial a_{uv}} = m a_{vu}^{(m-1)}, \tag{8}$$

where, as usual, t_m denotes the trace of the matrix A^m.

We now prove the following

Theorem 3. *A principal* VANDERMONDE *with respect to a matrix A is identically equal to the corresponding* VANDERMONDE *with respect to the characteristic matrix* i. e.,

$$V_s^r(A) \equiv V_s^r(A - \lambda I)$$

for all values of λ and the elements a_{ij} of the matrix A.

Proof. The equation

$$\Omega_0 f \equiv \frac{\partial f}{\partial a_{11}} + \frac{\partial f}{\partial a_{22}} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial a_{nn}} = 0$$

is a partial differential equation having for the general solution an arbitrary function of the differences $a_{11} - a_{22}, a_{11} - a_{33}, \ldots, a_{11} - a_{nn}$. This fact, togehter with the first of (7), viz., $\Omega_0 V_s^r(A) = 0$ tells us that the diagonal elements of A enter into $V_s^r(A)$ only in the combinations $a_{11} - a_{22}, a_{11} - a_{33}, \ldots, a_{11} - a_{nn}$. But these differences are unchanged if each element of A is replaced by the corresponding element of $A - \lambda I$. Thus the theorem is proved.

Perhaps the most striking result of the type discussed in this section is given by the following

Theorem 4. *The* JACOBIAN *of the coefficients of the characteristic equation with respect to the set of elements $a_{s_1 r_1}, a_{s_2 r_2}, \ldots, a_{s_n r_n}$ is, except possibly for sign, equal to the principal* VANDERMONDE *$V_s^r(A)$ where $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$, $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$.*

Proof. Consider again the matrix A with its characteristic equation written in the form

$$x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \cdots + c_n = 0.$$

As is known, the coefficients c_m may be expressed in terms of the traces t_m of A^m by means of the formulas

$$c_m = \frac{(-1)^m}{m!} \begin{vmatrix} t_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ t_2 & t_1 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{m-1} & t_{m-2} & t_{m-3} & \ldots & t_1 & m-1 \\ t_m & t_{m-1} & t_{m-2} & \ldots & t_2 & t_1 \end{vmatrix}. \tag{11}$$

By a familiar property of JACOBIANS, we have

$$(12)\qquad \frac{\partial(c_1, c_2, \ldots, c_n)}{\partial(a_{s_1 r_1}, a_{s_2 r_2}, \ldots, a_{s_n r_n})} = \frac{\partial(c_1, c_2, \ldots, c_n)}{\partial(t_1, t_2, \ldots, t_n)} \cdot \frac{\partial(t_1, t_2, \ldots, t_n)}{\partial(a_{s_1 r_1}, a_{s_2 r_2}, \ldots, a_{s_n r_n})}.$$

Using (8) we observe that

$$(13)\qquad \frac{\partial(t_1, t_2, \ldots, t_n)}{\partial(a_{s_1 r_1}, a_{s_2 r_2}, \ldots, a_{s_n r_n})} = n!\, V_s^r(A).$$

Also, after a computation, we find from (11) that

$$\frac{\partial(c_1, c_2, \ldots, c_n)}{\partial(t_1, t_2, \ldots, t_n)} = \frac{1}{n!}(-1)^n$$

so that by (12) we finally obtain

$$(14)\qquad \frac{\partial(c_1, c_2, \ldots, c_n)}{\partial(a_{s_1 r_1}, a_{s_2 r_2}, \ldots, a_{s_n r_n})} = (-1)^n V_s^r(A)$$

which proves the theorem.

In particular, when A is a diagonal matrix with diagonal elements $x_1, x_2, \ldots, x_n$ the coefficients of the characteristic equation become, apart from sign, the elementary symmetric functions $E_1, E_2, \ldots, E_n$ and Theorem 5 yields the classical result

$$\frac{\partial(E_1, E_2, \ldots, E_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

From equations (13) and (14) we also observe that *the* JACOBIAN *of the traces of the first n powers of a matrix A with respect to any n elements of A is identical with the* JACOBIAN *of the coefficients of the characteristic equation of A, except for a numerical factor depending only on n.*

PART II.

The independence theorem.

1. Notations. We shall now give a proof of the independence theorem. In view of the last statement in Section 3, the result may be stated as follows:

Theorem I. *If A is a square matrix of order n, the* JACOBIAN *of the coefficients of the characteristic function of A with respect to each set of n distinct elements of A, at least one of which is a diagonal element, is never identically zero in the n^2 variables of A.*

Let the n^2 elements $a_{\lambda\mu}$ of A be variables and let us write

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+x & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}+x \end{vmatrix} \equiv x^n + \varphi_1 x^{n-1} + \cdots + \varphi_n,$$

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} a_{22}+x & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}+x \end{vmatrix} \equiv x^{n-1}+\psi_1 x^{n-2}+\cdots+\psi_{n-1}.$$

Then the $\varphi_\varkappa$, $\psi_\varkappa$ are polynomials of the variables $a_{\lambda\mu}$. We denote the partial derivatives of the first and second orders, as follows:

$$(3)\qquad \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial a_{\lambda\mu}} = \frac{\varphi_\varkappa}{\lambda\,\mu}, \quad \frac{\partial^2 \varphi_\varkappa}{\partial a_{\lambda\mu}\,\partial a_{\varrho\sigma}} = \frac{\varphi_\varkappa}{\substack{\lambda\,\mu \\ \varrho\,\sigma}}.$$

Since the determinant (2) is the partial derivative of the determinant (1) with respect to a_{11} we have

$$(4)\qquad \frac{\varphi_1}{11}=1,\ \frac{\varphi_2}{11}=\psi_1,\ \frac{\varphi_3}{11}=\psi_2,\ \dots,\ \frac{\varphi_n}{11}=\psi_{n-1}.$$

The $\varphi_\varkappa$ are *linear* functions of the $a_{\lambda\mu}$ of the λ-th row or of the μ-th column, and hence, the second derivatives vanish, i. e.

$$(5)\qquad \frac{\varphi_\varkappa}{\substack{\lambda\,\mu \\ \lambda\,\sigma}}=0, \quad \frac{\varphi_\varkappa}{\substack{\lambda\,\mu \\ \varrho\,\mu}}=0.$$

Besides the trivial formula $\frac{\varphi_\varkappa}{\substack{\lambda\,\mu \\ \varrho\,\sigma}} = \frac{\varphi_\varkappa}{\substack{\varrho\,\sigma \\ \lambda\,\mu}}$ (interchange of the order of differentiation), we note also

$$(6)\qquad \frac{\varphi_\varkappa}{\substack{\lambda\,\mu \\ \varrho\,\sigma}} = -\frac{\varphi_\varkappa}{\substack{\lambda\,\sigma \\ \varrho\,\mu}}, \quad \frac{\varphi_\varkappa}{\substack{\lambda\,\mu \\ \varrho\,\sigma}} = -\frac{\varphi_\varkappa}{\substack{\varrho\,\mu \\ \lambda\,\sigma}}.$$

If $\varkappa=1$ or $\varkappa=2$ the formulas (6) are trivial. If $\lambda=\varrho$ or $\sigma=\mu$ formulas (6) follow from (5). Otherwise $\frac{\varphi_\varkappa}{\substack{\lambda\,\mu \\ \varrho\,\sigma}}$ is the sum of all principal minors of order $n-2$ in the algebraic complement in A of the determinant

$$\begin{vmatrix} a_{\lambda\mu} & a_{\lambda\sigma} \\ a_{\varrho\mu} & a_{\varrho\sigma} \end{vmatrix}.$$

Likewise $\frac{\varphi_\varkappa}{\substack{\lambda\,\sigma \\ \varrho\,\mu}}$ is the sume of the same determinants, each with opposite sign.

We now write the JACOBIAN

$$\Delta = \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)}{\partial(a_{\lambda_1\mu_1}, a_{\lambda_2\mu_2}, \dots, a_{\lambda_n\mu_n})},$$

where the $a_{\lambda\mu}$ denote any n different elements, in the form

$$(7)\qquad \Delta = \left| \frac{\varphi_\varkappa}{\lambda_1\,\mu_1}, \frac{\varphi_\varkappa}{\lambda_2\,\mu_2}, \dots, \frac{\varphi_\varkappa}{\lambda_n\,\mu_n} \right|_{\varkappa=1,2,\dots,n}.$$

Here we have exhibited only the $\varkappa$-th row of the whole determinant. We shall have proved the independence theorem if we can show that *the* JACOBIAN (7) *considered as a polynomial of the* n^2 *variables* $a_{\lambda\mu}$ *does not vanish identically provided there is at least one diagonal element in the* n *denominators* (*i. e.* $\lambda_r = \mu_r$).

2. The proof of the case where there is more than one diagonal element. The theorem is obviously true for $n = 1$. We shall prove it by induction by assuming that it holds for the $n-1$ functions $\psi_\varkappa$ defined by (2) and then showing that (7) does not vanish identically.

Consider first the case where there are at least two diagonal elements in the denominators of (7). Without loss of generality, we may suppose that among the denominators of the JACOBIAN (7) there is the element a_{11}. Then we write (7) in the form

$$(8)\qquad \Delta = \left| \frac{\varphi_\varkappa}{1\,1}, \frac{\varphi_\varkappa}{\lambda_1\,1}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{\lambda_r\,1}, \frac{\varphi_\varkappa}{1\,\mu_1}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{1\,\mu_s}, \frac{\varphi_\varkappa}{\varrho_1\,\sigma_1}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{\varrho_k\,\sigma_k} \right|_{\varkappa=1,\ldots,n},$$

where $\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \mu_1, \ldots, \mu_s, \varrho_1, \sigma_1, \ldots, \varrho_k, \sigma_k$ are greater than 1. The r elements $\lambda_1 1, \ldots, \lambda_r 1$ may be absent, in which case we set $r = 0$. Likewise the s elements $1\,\mu_1, \ldots, 1\,\mu_s$ may be absent, in which case we set $s = 0$. But k is greater than zero and among the last k denominators there is at least one diagonal element. Obviously, we have $1 + r + s + k = n$.

Let us now compute the k-th partial derivative of Δ with respect to a_{11}. This is a sum of determinants each multiplied by a numerical coefficient and each formed from (8) by differentiating k columns, not necessarily distinct. But we observe by (5) that after differentiating a column twice, we obtain a column of zeros and hence, the determinant vanishes. The same is true of those determinants in which we differentiate one of the first $1 + r + s$ columns. Hence there remains only the determinant in which each of the last k columns is differentiated exactly once and we get

$$\frac{\partial^k \Delta}{\partial a_{11}^k} = k! \left| \frac{\varphi_\varkappa}{1\,1}, \frac{\varphi_\varkappa}{\lambda_1\,1}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{\lambda_r\,1}, \frac{\varphi_\varkappa}{1\,\mu_1}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{1\,\mu_s}, \frac{\varphi_\varkappa}{\varrho_1\,\sigma_1}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{\varrho_k\,\sigma_k} \right|_{\varkappa=1,\ldots,n}.$$

Now, if $r > 0$ we take the r-th partial derivative of this last expression with respect to $a_{1\mu}$ where we choose $\mu \neq 1, \mu_1, \ldots, \mu_s, \sigma_1, \ldots, \sigma_k$. Thus at most $1 + s + k$ values are excluded for μ so that at least r values are admissible and hence such a choice is possible. By using the same procedure as in the k-th partial darivative of Δ we find

$$\frac{\partial^{k+r} \Delta}{\partial a_{1}^{k}\, \partial a_{1\mu}^{r}} = k!\, r! \left| \frac{\varphi_\varkappa}{1\,1}, \frac{\varphi_\varkappa}{\lambda_1\,1\;\;1\,\mu}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{\lambda_r\,1\;\;1\,\mu}, \frac{\varphi_\varkappa}{1\,\mu_1}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{1\,\mu_s}, \frac{\varphi_\varkappa}{\varrho_1\,\sigma_1\;\;1\,1}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{\varrho_k\,\sigma_k\;\;1\,1} \right|_{\varkappa=1,\ldots,n}.$$

If now, $s > 0$ we form the s-th partial derivative of the determinant in the right member of the preceding formula with respect to $a_{\lambda 1}$ where we choose $\lambda \neq 1, \lambda_1, \ldots, \lambda_r, \varrho_1, \ldots, \varrho_k$. This choice is possible because at most $1 + r + k$ values are excluded and consequently at least s values are admissible. We get

$$\frac{\partial^{k+r+s} \Delta}{\partial a_{11}^k \partial a_{1\mu}^r \partial a_{\lambda 1}^s} = k!\, r!\, s! \left| \frac{\varphi_\varkappa}{1\,1}, \frac{\varphi_\varkappa}{\lambda_1 1\ 1\mu}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{\lambda_r 1\ 1\mu}, \frac{\varphi_\varkappa}{1\,\mu_1\ \lambda\,1}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{1\,\mu_s\ \lambda\,1}, \frac{\varphi_\varkappa}{\varrho_1\,\sigma_1\ 1\,1}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{\varrho_k\,\sigma_k\ 1\,1} \right|_{\varkappa = 1, \ldots, n}.$$

The first row of this determinant is $1, 0, \ldots, 0$. Expanding by the first row and using the formulas (6), we find that the right member of the preceding equation reduces to

$$\pm \left| \frac{\varphi_\varkappa}{1\,1\ \lambda_1\,\mu}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{1\,1\ \lambda_r\,\mu}, \frac{\varphi_\varkappa}{1\,1\ \lambda\,\mu_1}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{1\,1\ \lambda\,\mu_s}, \frac{\varphi_\varkappa}{1\,1\ \varrho_1\,\sigma_1}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{1\,1\ \varrho_k\,\sigma_k} \right|_{\varkappa = 2, \ldots, n}.$$

But, by use of the relations (4), this becomes

$$\pm \left| \frac{\psi_{\varkappa-1}}{\lambda_1\,\mu}, \ldots, \frac{\psi_{\varkappa-1}}{\lambda_r\,\mu}, \frac{\psi_{\varkappa-1}}{\lambda\,\mu_1}, \ldots, \frac{\psi_{\varkappa-1}}{\lambda\,\mu_s}, \frac{\psi_{\varkappa-1}}{\varrho_1\,\sigma_1}, \ldots, \frac{\psi_{\varkappa-1}}{\varrho_k\,\sigma_k} \right|_{\varkappa = 2, \ldots, n}.$$

Finally, by an obvious change of notation, we have

$$\frac{\partial^{k+r+s} \Delta}{\partial a_{11}^k \partial a_{1\mu}^r \partial a_{\lambda 1}^s} = k!\, r!\, s! \left| \frac{\psi_\varkappa}{\lambda_1\,\mu}, \ldots, \frac{\psi_\varkappa}{\lambda_r\,\mu}, \frac{\psi_\varkappa}{\lambda\,\mu_1}, \ldots, \frac{\psi_\varkappa}{\lambda\,\mu_s}, \frac{\psi_\varkappa}{\varrho_1\,\sigma_1}, \ldots, \frac{\psi_\varkappa}{\varrho_k\,\sigma_k} \right|_{\varkappa = 1, \ldots, n-1}.$$

Here the $n-1$ denominators are all different from each other in view of the choice of λ and μ. Hence we have a JACOBIAN of $n-1$ rows and among the denominators there is at least one diagonal element; in fact, it lies in the last k denominators, as originally assumed. For such a JACOBIAN the theorem was assumed to be true and hence Δ does not vanish identically.

3. The proof of the case where there is only a single diagonal element. Here the first row of the JACOBIAN (7) consists of a 1 and $n-1$ zeros, so that (7) reduces to a determinant of order $n-1$. Without loss of generality, we may assume that among the denominators there occurs the element a_{12} so that we may write this determinant of order $n-1$ as

$$\Delta = \left| \frac{\varphi_\varkappa}{1\,2}, \frac{\varphi_\varkappa}{\lambda_1\,1}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{\lambda_r\,1}, \frac{\varphi_\varkappa}{1\,\mu_1}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{1\,\mu_s}, \frac{\varphi_\varkappa}{1\,\nu_1}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{1\,\nu_t}, \frac{\varphi_\varkappa}{\varrho_1\,\sigma_1}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{\varrho_k\,\sigma_k} \right|_{\varkappa = 2, \ldots, n},$$

where $\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \varrho_1, \sigma_1, \ldots, \varrho_k, \sigma_k$ are greater than 1 and $\mu_1, \ldots, \mu_s, \nu_1, \ldots, \nu_t$ are greater than 2. Since no diagonal element occurs in the right member of Δ we have

$$\varrho_1 \neq \sigma_1, \ldots, \varrho_k \neq \sigma_k, \tag{9}$$

The denominators in the right member of the preceding determinant having the first figure 1 are divided into two classes. The first class $1\mu_1, \ldots, 1\mu_s$ consists of those for which the symbols $2\mu_1, \ldots, 2\mu_s$ are contained in the last k symbols $\varrho_1\sigma_1, \ldots, \varrho_k\sigma_k$; the second class $1\nu_1, \ldots, 1\nu_t$ consists of those for which $2\nu_1, \ldots, 2\nu_t$ are not contained in the last k symbols. Clearly $1+r+s+t+k=n-1$. Each of the numbers r, s, t, k may be zero, in which case the corresponding elements are missing.

Now, if $k>0$ we form the k-th partial derivative of Δ with respect to a_{11}. This yields, apart from the factor $k!$

$$\left| \frac{\varphi_\varkappa}{12}, \frac{\varphi_\varkappa}{\lambda_1 1}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{\lambda_r 1}, \frac{\varphi_\varkappa}{1\mu_1}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{1\mu_s}, \frac{\varphi_\varkappa}{1\nu_1}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{1\nu_t}, \frac{\varphi_\varkappa}{\varrho_1\sigma_1 \atop 1\,1}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{\varrho_k\sigma_k \atop 1\,1} \right|_{\varkappa=2,\ldots,n}.$$

If, next we take the $(t+1)$-st derivative of this last determinant with respect to a_{21}, and omit the factor $(t+1)!$ we obtain

$$\left| \frac{\varphi_\varkappa}{1\,2 \atop 2\,1}, \frac{\varphi_\varkappa}{\lambda_1 1}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{\lambda_r 1}, \frac{\varphi_\varkappa}{1\mu_1}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{1\mu_s}, \frac{\varphi_\varkappa}{1\nu_1 \atop 2\,1}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{1\nu_t \atop 2\,1}, \frac{\varphi_\varkappa}{\varrho_1\sigma_1 \atop 1\,1}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{\varrho_k\sigma_k \atop 1\,1} \right|_{\varkappa=2,\ldots,n}.$$

It is to be noticed here that we have not written the symbol 2 1 under the symbols $1\mu_\alpha$. If we had done so, we would have, in view of (6)

$$\frac{\varphi_\varkappa}{1\mu_\alpha \atop 2\,1} = -\frac{\varphi_\varkappa}{2\mu_\alpha \atop 1\,1}.$$

But the symbol $2\mu_\varkappa$ was supposed to be identical with a $\varrho_\beta\sigma_\beta$ so that the determinant in question would vanish, since it would have two columns whose elements are the negatives of each other.

Now, if $r>0$ we form the r-th partial derivative of the last written determinant with respect to $a_{1\mu}$ where we choose $\mu \neq 1, 2, \mu_1, \ldots, \mu_s, \nu_1, \ldots, \nu_t, \sigma_1, \ldots, \sigma_k$, and we have at least r possibilities for this choice. Finally, if $s>0$ we take the s-th partial derivative of the preceding partial derivative, with respect to $a_{\lambda 1}$, where we choose $\lambda \neq 1, 2, \lambda_1, \ldots, \lambda_r, \varrho_1, \ldots, \varrho_k$, and we have at least s possibilities for this choice. Omitting the factors $r!$ and $s!$ we obtain in this way

$$\left| \frac{\varphi_\varkappa}{1\,2 \atop 2\,1}, \frac{\varphi_\varkappa}{\lambda_1 1 \atop 1\,\mu}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{\lambda_r 1 \atop 1\,\mu}, \frac{\varphi_\varkappa}{1\mu_1 \atop \lambda\,1}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{1\mu_s \atop \lambda\,1}, \frac{\varphi_\varkappa}{1\nu_1 \atop 2\,1}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{1\nu_t \atop 2\,1}, \frac{\varphi_\varkappa}{\varrho_1\sigma_1 \atop 1\,1}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{\varrho_k\sigma_k \atop 1\,1} \right|_{\varkappa=2,\ldots,n}.$$

But in view of the relations (6), this determinant may be reduced to

$$\pm \left| \frac{\varphi_\varkappa}{\begin{matrix}1&1\\2&2\end{matrix}}, \frac{\varphi_\varkappa}{\begin{matrix}1&1\\\lambda_1&\mu\end{matrix}}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{\begin{matrix}1&1\\\lambda_r&\mu\end{matrix}}, \frac{\varphi_\varkappa}{\begin{matrix}1&1\\\lambda&\mu_1\end{matrix}}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{\begin{matrix}1&1\\\lambda&\mu_s\end{matrix}}, \frac{\varphi_\varkappa}{\begin{matrix}1&1\\2&\nu_1\end{matrix}}, \ldots, \right.$$

$$\left. \frac{\varphi_\varkappa}{\begin{matrix}1&1\\2&\nu_t\end{matrix}}, \frac{\varphi_\varkappa}{\begin{matrix}1&1\\\varrho_1&\sigma_1\end{matrix}}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{\begin{matrix}1&1\\\varrho_k&\sigma_k\end{matrix}} \right|_{\varkappa=2,\ldots,n},$$

and by the relations (4) this becomes

$$\pm \left| \frac{\psi_{\varkappa-1}}{2\,2}, \frac{\psi_{\varkappa-1}}{\lambda_1\,\mu}, \ldots, \frac{\psi_{\varkappa-1}}{\lambda_r\,\mu}, \frac{\psi_{\varkappa-1}}{\lambda\,\mu_1}, \ldots; \frac{\psi_{\varkappa-1}}{\lambda\,\mu_s}, \frac{\psi_{\varkappa-1}}{2\,\nu_1}, \ldots, \right.$$

$$\left. \frac{\psi_{\varkappa-1}}{2\,\nu_t}, \frac{\psi_{\varkappa-1}}{\varrho_1\,\sigma_1}, \ldots, \frac{\varphi_{\varkappa-1}}{\varrho_k\,\sigma_k} \right|_{\varkappa=2,\ldots,n}.$$

But by the restrictions (9) on the choice of λ and μ the $n-1$ denominators are all different from each other and among them is the diagonal element a_{22}. Hence it is a JACOBIAN of order $n-1$ which we have assumed to be not identically zero and thus the JACOBIAN Δ does not vanish identically.

4. Some generalizations. With very slight changes in the procedure given above, we may prove

Theorem 2. *Let $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ be any set chosen from among the numbers* 1, 2, ..., *n. Then the* JACOBIAN

$$\frac{\partial(\varphi_{\nu_1}, \varphi_{\nu_2}, \ldots, \varphi_{\nu_m})}{\partial(a_{\lambda_1\mu_1}, a_{\lambda_2\mu_2}, \ldots, a_{\lambda_m\mu_m})}$$

does not vanish identically, provided that among the m elements of the denominator there is at least one diagonal element.

Theorem 3. *Let $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ be any set chosen from the numbers* 2, 3, ..., *n. Then the* JACOBIAN

$$\frac{\partial(\varphi_{\nu_1}, \varphi_{\nu_2}, \ldots, \varphi_{\nu_m})}{\partial(a_{\lambda_1\mu_1}, a_{\lambda_2\mu_2}, \ldots, a_{\lambda_m\mu_m})}$$

does not vanish identically.

Here no restriction on the presence of a diagonal element is made. Since $m < n$ there is at least one diagonal element missing in the denominator of the JACOBIAN, say a_{11}. Then we form first the highest possible partial derivative with respect to a_{11} which does not vanish in a trivial manner; then we do likewise with respect to $a_{1\mu}$ with a suitably chosen μ; finally, we use $a_{\lambda 1}$ with a suitable λ or, if necessary, two suitable $\lambda's$ (This is similar to Section 3. where we first used a_{21}, then $a_{\lambda 1}$ with $\lambda \neq 2$).

(Eingegangen am 11. Oktober 1949.)

Bemerkungen zur Fehlertheorie.

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag am 7. Mai 1950 gewidmet.

von

Max Müller in Tübingen.

Bei einer Folge reeller Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu, \ldots$ bezeichnen wir die Anzahl derjenigen unter den Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, die die Ungleichung $\alpha \leqq \varepsilon_\nu \leqq \beta$ erfüllen, mit $A_n(\varepsilon_\nu, \alpha, \beta)$. Gibt es eine nichtnegative, eigentlich R-integrierbare Funktion $\varphi(\varepsilon)$ derart, daß für jedes Intervall $\langle \alpha, \beta \rangle$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{A_n(\varepsilon_\nu; \alpha, \beta)}{n} = \int_\alpha^\beta \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon, \tag{1}$$

so nennt man $\varphi(\varepsilon)$ die Dichte der Folge $\{\varepsilon_\nu\}$. Bei einer Folge von Beobachtungsfehlern ε_ν nimmt man insbesondere an, daß $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = 1$ sei, und nennt $\varphi(\varepsilon)$ ihr Fehlergesetz.

Man pflegt eine Funktion $\varphi(\varepsilon)$ auch schon dann Fehlergesetz zu nennen, wenn sie für alle ε definiert, nicht negativ und über jedes endliche Intervall integrierbar ist, und wenn überdies $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon$ existiert und gleich 1 ist[1]). Diese Benennung scheint mir nur dann sinnvoll zu sein, wenn feststeht, daß es mindestens eine Fehlerfolge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ gibt, bei welcher die Beziehung (1) für dieses $\varphi(\varepsilon)$ gilt. Ob diese Bedingung immer erfüllt ist, fand ich in der Literatur nirgends untersucht. Vor etwa einem Jahr teilte mir Herr H. Kneser nach einer Unterhaltung über diese Frage einen Beweis mit, den ich hier mit seiner Zustimmung in § 1 wiedergebe.

Die Verbindung mit der Lehre von der Gleichverteilung, die der Knesersche Beweis herstellt, läßt sich auch bei der Untersuchung der

[1]) So z. B. F. Bernstein, Über das Gaußsche Fehlergesetz. Math. Ann. **64**, 1907, S. 417—448, bes. S. 420 unter dem Namen Fehlerfunktion. — G. Pólya, Herleitung des Gaußschen Fehlergesetzes aus einer Funktionalgleichung. Math. Zeitschr. **18**, 1923, S. 96—108, bes. S. 97. — F. R. Helmert, Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate (2. Aufl., Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner, 1907), S. 10 ff. — F. Zernicke, Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. Handbuch der Physik, herausgegeben von Geiger und Scheel, Bd. III (Berlin, J. Springer, 1928), S. 469 ff.

folgenden Frage ausnutzen: Ist $\varphi(\varepsilon)$ das Fehlergesetz und $\psi(\varepsilon)$ die Bedeutung des Fehlers ε, so wird das Fehlerrisiko durch die Formel

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\varepsilon)\, \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

definiert[2]). Für $\psi(\varepsilon) = |\varepsilon|$ wird R gleich dem durchschnittlichen Fehler ϑ, für $\psi(\varepsilon) = \varepsilon^2$ gleich dem Quadrat des mittleren Fehlers μ der Fehlerfolge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$. Es ist wichtig zu wissen, ob man R schon aus den n ersten Fehlern $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ näherungsweise berechnen kann. Ohne die Voraussetzungen genau zu nennen und ohne seine Schlußweise eingehender darzulegen, behauptet E. Czuber[3]), daß dem Bernoullischen Theorem zufolge

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \psi(\varepsilon_\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\varepsilon)\, \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon \tag{2}$$

sei, und J. Bauschinger[4]) schreibt geradezu, wohl dasselbe meinend,

„$\int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon|\, \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{|\varepsilon_1| + \cdots + |\varepsilon_n|}{n} = \vartheta$ = durchschnittlicher Fehler,

$\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{\varepsilon_1^2 + \cdots + \varepsilon_n^2}{n} = \mu^2$ = Quadrat des mittleren Fehlers".

Auch sonst scheint vielfach die Beziehung (2) als selbstverständlich angesehen zu werden[5]).

Wir werden in § 2 und § 5 Voraussetzungen angeben, unter denen die Beziehung (2) gewiß gilt, aber auch an einem Beispiel in § 3 zeigen, daß sie selbst dann nicht ausnahmslos besteht, wenn das uneigentliche Integral existiert. Immer gilt aber unter praktisch wohl nicht zu engen Voraussetzungen bezüglich $\varphi(\varepsilon)$ und $\psi(\varepsilon)$, wie wir in § 4 beweisen, die Formel

$$\lim_{\varepsilon\to\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\substack{\nu=1 \\ |\varepsilon_\nu| \leq \varepsilon}}^{n} \psi(\varepsilon_\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\varepsilon)\, \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon\,. \tag{2*}$$

[2]) E. Czuber, Theorie der Beobachtungsfehler, Leipzig, B. G. Teubner, 1891, S. 128. E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung I (4. Aufl., Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner, 1924), S. 308 ff.

[3]) E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung ..., a. in [2]) a. O., S. 310.

[4]) Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften I_2 (Leipzig, B. G. Teubner, 1900—1904), S. 779; Artikel Ausgleichungsrechnung von J. Bauschinger.

[5]) M. Näbauer, Grundzüge der Geodäsie mit Einschluß der Ausgleichungsrechnung (2. Aufl., Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner, 1925), S. 11. — O. Eggert, Einführung in die Geodäsie (Leipzig, B. G. Teubner, 1907), S. 25 u. 29. — F. R. Helmert, a. in [1]) a. O., S. 19/20 und S. 28/29.

§ 1.

Das allgemeinste Fehlergesetz.

Satz 1. *Zu jeder für* $-\infty < \varepsilon < \infty$ *definierten, nicht negativen Funktion* $\varphi(\varepsilon)$, *für welche* $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon$ *existiert und gleich 1 ist, gibt es eine Zahlenfolge* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ *derart, daß für jedes Intervall* $\langle \alpha, \beta \rangle$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{A_n(\varepsilon_\nu; \alpha, \beta)}{n} = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

wird.

Beweis. Wir setzen

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon . \tag{3}$$

Es ist $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$, $F(t)$ im Intervall $-\infty < t < \infty$ stetig und nicht abnehmend. Einen konstanten Wert r, den $F(t)$ in einem ganzen Intervall annimmt, bezeichnen wir als Ruhewert. Jedem Ruhewert r ordnen wir umgekehrt das größte Intervall $t'(r) < t < t''(r)$ zu, in welchem $F(t) = r$. Zu zwei verschiedenen Ruhewerten r_1 und $r_2 (> r_1)$ gehören zwei verschiedene Ruheintervalle $(t'(r_1), t''(r_1))$ und $(t'(r_2), t''(r_2))$, wobei $t''(r_1) < t'(r_2)$. $F(t)$ kann also nur abzählbar viele Ruhewerte haben.

Wir können zu $x = F(t)$ eine Umkehrungsfunktion $t = \Phi(x)$ im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ eindeutig definieren. Ist $r = 0$ Ruhewert, dem das Intervall $-\infty < t < A$ zugeordnet ist, so setzen wir $\Phi(0) = A$; ist $r = 0$ nicht Ruhewert, so setzen wir $\Phi(0) = -\infty$. Ist $r = 1$ Ruhewert, dem das Intervall $B < t < \infty$ zugeordnet ist, so setzen wir $\Phi(1) = B$; ist $r = 1$ nicht Ruhewert, so setzen wir $\Phi(1) = \infty$. An einer Stelle x, die ein von 0 und 1 verschiedener Ruhewert r von $F(t)$ ist, setzen wir $\Phi(x) = \Phi(r) = t^*(r)$, wo $t^*(r)$ beliebig, aber in fester Weise dem Intervall $t'(r) \leqq t \leqq t''(r)$ entnommen ist. An einer Stelle x, die nicht Ruhewert von $F(t)$ ist, sei $\Phi(x)$ die Abszisse des Schnittpunktes der Kurve $y = F(t)$ mit der Parallelen zur t-Achse im Abstand $y = x$. Dieses $\Phi(x)$ ist im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ eindeutig, steigt monoton, hat keine Konstanzintervalle; es ist nur an den Stellen $x = r$ unstetig, wo es springt.

Bedeutet nun $x_1, x_2, \ldots$ irgendeine Folge im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ gelegener und darin gleichverteilter untereinander verschiedener Zahlen, ist also für beliebiges u und v mit $0 \leqq u < v \leqq 1$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{A_n(x_\nu; u, v)}{n} = v - u \quad ^{6)7)}, \tag{4}$$

---

[6]) Vgl. H. Weyl, Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. Math. Ann. **77**, 1916, S. 313—352, sowie die dort genannten Literaturstellen.

[7]) Ein besonders bekanntes Beispiel einer Folge von im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ gelegenen und darin gleich verteilten untereinander verschiedenen Zahlen ist die

so setzen wir

$$\varepsilon_\nu = \Phi(x_\nu) \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Für $x_\nu \neq x_{\nu'}$ ist auch $\varepsilon_\nu \neq \varepsilon_{\nu'}$. Es ist bei beliebiger Wahl der Zahlen α und $\beta (> \alpha)$ im allgemeinen

$$A_n(\varepsilon_\nu;\, \alpha,\, \beta) = A_n(x_\nu;\, F(\alpha),\, F(\beta))$$

und nur dann

$$A_n(\varepsilon_\nu;\, \alpha,\, \beta) = A_n(x_\nu;\, F(\alpha),\, F(\beta)) - 1,$$

wenn entweder

$$t'(r) \leqq \beta < t^*(r) \leqq t''(r)$$

oder

$$t'(r) \leqq t^*(r) < \alpha \leqq t''(r)$$

und r unter den Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vorkommt, und nur dann

$$A_n(\varepsilon_\nu;\, \alpha,\, \beta) = A_n(x_\nu;\, F(\alpha),\, F(\beta)) - 2,$$

wenn r_1 und $r_2 (> r_1)$ unter den Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ vorkommen und $t^*(r_1) < \alpha \leqq t''(r_1)$ und gleichzeitig $t'(r_2) \leqq \beta < t^*(r_2)$ ist.

Mit Rücksicht auf (4) ist daher

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} \frac{A_n(\varepsilon_\nu;\, \alpha,\, \beta)}{n} &= \lim_{n \to \infty} \frac{A_n(x_\nu;\, F(\alpha),\, F(\beta))}{n} \\ &= F(\beta) - F(\alpha) \\ &= \int_\alpha^\beta \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon. \end{aligned}$$

Die konstruierte Zahlenfolge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ hat also die vorgegebene Funktion $\varphi(\varepsilon)$ zur Dichte.

§ 2.

Hinreichende Bedingungen für die Gültigkeit der Formel (2).

1. Der soeben ausgenutzte Zusammenhang zwischen einer Folge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, die eine Dichte $\varphi(\varepsilon)$ hat, für welche $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = 1$ ist, und der im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ gleichverteilten Folge $x_1, x_2, \ldots$ läßt sich umkehren. Es gilt

Folge der Zahlen $x_\nu = \nu\xi - [\nu\xi]$, wo ξ eine beliebige Irrationalzahl ist. (Vgl. H. Weyl, a. in [6]) a. O.). Herr H. Kneser hat bei derselben Gelegenheit auch das folgende einfache Beispiel einer Folge von im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ gelegenen und darin gleichverteilten untereinander verschiedenen Zahlen angegeben:

$$x_1 = 2^{-1},\quad x_{2^{n+1}+k} = x_{2^n+k} - 2^{-n-2},\quad x_{2^{n+1}+2^n+k} = x_{2^n+k} + 2^{-n-2} \quad (n \geqq 0,\ 0 \leqq k < 2^n).$$

Satz 2. *Hat die Folge* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ *eine Dichte* $\varphi(\varepsilon)$, *für welche* $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = 1$ *ist, und setzt man*

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon,$$

so ist die Folge der Zahlen $x_\nu = F(\varepsilon_\nu)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ *im Intervall* $0 \leqq x \leqq 1$ *gleichverteilt.*

Beweis. Zunächst ist $0 \leqq x_\nu \leqq 1$ für alle ν; werden u und v so gewählt, daß $0 \leqq u < v \leqq 1$, und wird $\alpha = \Phi(u)$, $\beta = \Phi(v)$ gesetzt, so ist

$$A_n(x_\nu;\, u,\, v) = A_n(\varepsilon_\nu;\, \Phi(u),\, \Phi(v)) = A_n(\varepsilon_\nu;\, \alpha,\, \beta),$$

falls u und v nicht Ruhewerte von $F(t)$ sind,

$$A_n(x_\nu;\, u,\, v) = A_n(\varepsilon_\nu;\, t'(u),\, \Phi(v)) = A_n(\varepsilon_\nu;\, t'(u),\, \beta),$$

falls u Ruhewert, v nicht Ruhewert von $F(t)$ ist,

$$A_n(x_\nu;\, u,\, v) = A_n(\varepsilon_\nu;\, \Phi(u),\, t''(v)) = A_n(\varepsilon_\nu;\, \alpha,\, t''(v)),$$

falls v Ruhewert, u nicht Ruhewert von $F(t)$ ist,

$$A_n(x_\nu;\, u,\, v) = A_n(\varepsilon_\nu;\, t'(u),\, t''(v)),$$

falls u und v Ruhewerte von $F(t)$ sind.

Es strebt also beziehentlich für $n \to \infty$

$$\frac{A_n(x_\nu;\, u,\, v)}{n} \to \begin{cases} F(\beta) - F(\alpha), \\ F(\alpha) - F(t'(u)) + F(\beta) - F(\alpha), \\ F(\beta) - F(\alpha) + F(t''(v)) - F(\beta), \\ F(\alpha) - F(t'(u)) + F(\beta) - F(\alpha) + F(t''(v)) - F(\beta), \end{cases}$$

d.h. es ist, weil $F(t)$ in den Intervallen $t'(u) \leqq \varepsilon \leqq \alpha$ und $\beta \leqq \varepsilon \leqq t''(v)$ konstant ist, allemal

$$\lim_{n \to \infty} \frac{A_n(x_\nu;\, u,\, v)}{n} = F(\beta) - F(\alpha) = v - u,$$

also die Folge $x_1, x_2, \ldots$ gleichverteilt im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$. Dies gilt, wie auch $\Phi(x)$ an seinen Sprungstellen im einzelnen definiert wurde.

2. Ist $f(x)$ irgendeine eigentlich R-integrierbare Funktion, so gilt für die im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ gleichverteilte Folge $x_1, x_2, \ldots$ nach einem bekannten Satz der Gleichverteilungslehre[8]) die Beziehung

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu) = \int_0^1 f(x)\, dx.$$

[8]) H. Weyl, a. in [6]) a. O., S. 313/4. Auch schon und wohl zuerst bei H. Weyl, Über ein Problem aus dem Gebiet der Diophantischen Approximationen. Nachr. d. K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, math.-phys. Klasse 1914, S. 234—244. Vgl. auch die einfache Darstellung bei G. H. Hardy, Divergent Series (Oxford, At the Clarendon Press, 1949), S. 115.

Hieraus entsteht — zunächst formal — die Formel (2), wenn man $f(x) = \psi(\Phi(x))$ setzt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \psi(\varepsilon_\nu) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \psi(\Phi(x_\nu)) = \int_0^1 \psi(\Phi(x))\, dx$$

$$= \int_{\Phi(0)}^{\Phi(1)} \psi(\varepsilon)\, F'(\varepsilon)\, d\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\varepsilon)\, F'(\varepsilon)\, d\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\varepsilon)\, \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon,$$

denn man darf auch dann, wenn $\Phi(0) = A$, bzw. $\Phi(1) = B$ sein sollte, die Integration nachträglich über das ganze Intervall $-\infty < \varepsilon < \infty$ erstrecken, weil dann für $-\infty < \varepsilon < A$, bzw. $B < \varepsilon < \infty$ die Funktion $F(t) = 0$, bzw. gleich 1, also $F'(t) = 0$ ist.

Gewiß gilt hiernach die Formel (2), wenn $\psi(\Phi(x))$ im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ eigentlich R-integrierbar und der Übergang von der Integrationsvariablen x zur neuen Integrationsvariablen ε statthaft ist. Dies ist gewiß der Fall, wenn einerseits $\psi(\varepsilon)$ für $-\infty < \varepsilon < \infty$ beschränkt und abteilungsweise stetig [9]) ist, weil dann wegen der Monotonie von $\Phi(x)$ im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ die Funktion $\psi(\Phi(x))$ über dieses Intervall eigentlich R-integrierbar wird [10]), und wenn andererseits $\varphi(\varepsilon)$ im Intervall $-\infty < \varepsilon < \infty$ abteilungsweise stetig ist. Wenn $\varphi(\varepsilon)$ außerhalb eines Intervalles $A < \varepsilon < B$ verschwindet, so genügt es, daß $\psi(\varepsilon)$ in diesem Intervall abteilungsweise stetig ist. Es gilt also

Satz 3. *Hat die Folge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ die Dichte $\varphi(\varepsilon)$, ist* $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = 1$ *und $\varphi(\varepsilon)$ abteilungsweise stetig, so gilt für jede in $-\infty < \varepsilon < \infty$ beschränkte und abteilungsweise stetige Funktion $\psi(\varepsilon)$ die Formel*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \psi(\varepsilon_\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\varepsilon)\, \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon. \tag{2}$$

Wenn $\varphi(\varepsilon)$ außerhalb eines Intervalles $A < \varepsilon < B$ [11]) verschwindet, so genügt es, daß $\psi(\varepsilon)$ im Intervall $A < \varepsilon < B$ beschränkt und abteilungsweise stetig ist.

[9]) Das Intervall $-\infty < \varepsilon < \infty$ soll sich also derart in Teilintervalle $a < \varepsilon < b$ zerlegen lassen, daß $\psi(\varepsilon)$ in $a < \varepsilon < b$ stetig ist und die Annäherungswerte $\psi(a + 0)$ und $\psi(b - 0)$ existieren.

[10]) Nach einem Satz von P. du Bois-Reymond. Math. Ann. **16**, 1880, S. 112 und Math. Ann. **20**, 1882, S. 122—124. Vgl. auch E. W. Hobson, The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series I (3. Aufl., Cambridge 1927), S. 473 ff. Oder M. Müller, Die Annäherung des Integrales zusammengesetzter Funktionen mittels verallgemeinerter Riemannscher Summen und Anwendungen. Sitzungsber. d. Heidelberger Akademie d. Wissensch., math.-naturw. Kl. 1937, 6. Abhandlung, S. 5—7.

[11]) Hier darf auch $A = -\infty$ oder $B = +\infty$ gesetzt werden.

§ 3.

Ein Beispiel.

Gerade bei der Bestimmung von durchschnittlichem und mittlerem Fehler, d. h. bei den Funktionen $\psi(\varepsilon) = |\varepsilon|$ und $\psi(\varepsilon) = \varepsilon^2$, und bei Benutzung des Gaussschen Fehlergesetzes $\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2}$ sind die Voraussetzungen von Satz 3 nicht erfüllt. Es entsteht die Frage, ob die Formel (2) wenigstens dann noch gilt, wenn das rechterhand auftretende uneigentliche Integral konvergiert. Daß sie im allgemeinen zu verneinen ist, lehrt das folgende Beispiel.

Es sei $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ eine Folge mit der Dichte $\varphi(\varepsilon)$, bei welcher $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = 1$ ist und für einen positiven Exponenten k das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon|^k \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon$ konvergiert.

Wir wählen die ganze Zahl $q > 1$ und die ganze Zahl $r > q - 1$. Wir setzen $p = \frac{r}{kq}$ und

$$\varepsilon_\nu^* = \begin{cases} \varepsilon_\nu, & \text{falls } \nu \text{ nicht } q\text{-te Potenz einer natürlichen Zahl ist,} \\ \nu^p = \lambda^{\frac{r}{k}}, & \text{falls } \nu = \lambda^q \ (\lambda = 1, 2, 3, \ldots). \end{cases}$$

Dann ist

$$A_n(\varepsilon_\nu^*; \alpha, \beta) = A_n(\varepsilon_\nu; \alpha, \beta) - A_n' + A_n'',$$

wo A_n' die Anzahl derjenigen unter den Zahlen $\nu = 1, 2, \ldots, n$ bedeutet, die die q-te Potenz einer natürlichen Zahl sind und für die entweder $\nu^p < \alpha$ oder $\nu^p > \beta$ ist, und A_n'' die Anzahl derjenigen der Zahlen $\nu = 1, 2, \ldots, n$, die die q-te Potenz einer natürlichen Zahl λ sind und für die ν^p, aber nicht ε_ν im Intervall $\langle \alpha, \beta \rangle$ liegt. Daher ist

$$|A_n(\varepsilon_\nu^*; \alpha, \beta) - A_n(\varepsilon_\nu; \alpha, \beta)| \leqq A_n' + A_n'',$$

also höchstens gleich der Anzahl derjenigen der Zahlen $1, 2, \ldots, n$, die die q-te Potenz einer natürlichen Zahl sind. Es ist also

$$|A_n(\varepsilon_\nu^*; \alpha, \beta) - A_n(\varepsilon_\nu; \alpha, \beta)| \leqq \sqrt[q]{n}$$

und daher

$$\frac{A_n(\varepsilon_\nu^*; \alpha, \beta)}{n} = \frac{A_n(\varepsilon_\nu; \alpha, \beta)}{n} + \frac{A_n(\varepsilon_\nu^*; \alpha, \beta) - A_n(\varepsilon_\nu; \alpha, \beta)}{n} \to \int_\alpha^\beta \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon;$$

die Folge $\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \ldots$ hat also auch die Dichte $\varphi(\varepsilon)$.

Andererseits ist

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu^{*\,k} \geqq \frac{1}{n} \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu = \lambda^q}}^{n} |\varepsilon_\nu^*|^k = \frac{1}{n} \sum_{\lambda=1}^{[\sqrt[q]{n}]} \lambda^r;$$

daher, weil für alle ganzen positiven Zahlen r

$$\lim_{m \to \infty} \frac{1}{m^{r+1}} \sum_{\lambda=1}^{m} \lambda^r = \frac{1}{r+1}$$

und damit für hinreichend großes m

$$\sum_{\lambda=1}^{m} \lambda^r \geqq \frac{1}{2(r+1)} m^{r+1}$$

ist, für alle hinreichend großen n

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} |\varepsilon_\nu^*|^k \geqq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2(r+1)} [\sqrt[q]{n}]^{r+1} > \frac{1}{2(r+1)} (\sqrt[q]{n})^{r+1-q} \left(1 - \frac{1}{\sqrt[q]{n}}\right)^{r+1};$$

da bei unseren Annahmen $r+1-q>0$ ist, strebt also

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} |\varepsilon_\nu^*|^k \to \infty \quad \text{für} \quad n \to \infty,$$

während auf der rechten Seite von (2) eine endliche Zahl steht.

§ 4.

Beweis der Formel (2*).

Das soeben behandelte Beispiel zeigt, daß die Formel (2) zur Berechnung des Fehlerrisikos unbrauchbar werden kann, wenn die Voraussetzungen von Satz 3 nicht erfüllt sind. Einen Ausweg aus dieser Schwierigkeit zeigt

Satz 4. *Hat die Folge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ eine in jedem endlichen Intervall beschränkte Dichte $\varphi(\varepsilon)$, so gilt für jede über jedes endliche Intervall eigentlich R-integrierbare Funktion $\psi(\varepsilon)$, für welche $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\varepsilon)\, \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon$ existiert, die Formel*

$$\lim_{s \to \infty} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{\substack{\nu=1 \\ \varepsilon_\nu \leqq s}}^{n} \psi(\varepsilon_\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\varepsilon)\, \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon. \tag{2*}$$

Beweis. Wir setzen für beliebige Zahlen a und b $(>a)$

$$\chi(\varepsilon; a, b) = \begin{cases} 1 \text{ für } a \leqq \varepsilon < b, \\ 0 \text{ für } \varepsilon < a \text{ und } \varepsilon \geqq b. \end{cases}$$

Ist $\langle \alpha, \beta \rangle$ irgend ein Intervall, so gibt es Zahlen α', α'' und β'', β', die beliebig nahe bei α bzw. β liegen, die Ungleichung $\alpha' < \alpha < \alpha'' < \beta'' < \beta < \beta'$ befriedigen und mit keiner der Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ zusammenfallen. Es

ist also

$$A_n(\varepsilon_\nu;\, \alpha'',\, \beta\,) = \sum_{\nu=1}^{n} \chi(\varepsilon_\nu;\, \alpha'',\, \beta'')$$

$$\leqq \sum_{\nu=1}^{n} \chi(\varepsilon_\nu;\, \alpha,\, \beta) \leqq \sum_{\nu=1}^{n} \chi(\varepsilon_\nu;\, \alpha',\, \beta') = A_n(\varepsilon_\nu;\, \alpha',\, \beta').$$

Division durch n und der Grenzübergang $n \to \infty$ ergibt

$$\int_{\alpha''}^{\beta''} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon \leqq \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \chi(\varepsilon_\nu;\, \alpha,\, \beta) \leqq \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \chi(\varepsilon_\nu;\, \alpha,\, \beta) \leqq \int_{\alpha'}^{\beta'} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon,$$

und hieraus folgt für $\alpha' \to \alpha$, $\alpha'' \to \alpha$, $\beta' \to \beta$, $\beta'' \to \beta$, daß

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \chi(\varepsilon_\nu;\, \alpha,\, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon. \tag{5}$$

Für jede positive Zahl s ist die Funktion

$$\psi(\varepsilon;\, s) = \begin{cases} \psi(\varepsilon) & \text{für } |\varepsilon| \leqq s, \\ 0 & \text{für } |\varepsilon| > s \end{cases}$$

über das Intervall $-s \leqq \varepsilon \leqq s$ eigentlich R-integrierbar. Es sei $0 \leqq \varphi(\varepsilon) < M$ für $\varepsilon \leqq s$. η eine beliebige positive Zahl. Dazu gibt es eine Zerlegung

$$-s = t_0 < t_1 < \cdots < t_\varkappa < t_{\varkappa+1} < \cdots < t_k = s$$

des Intervalles $-s \leqq \varepsilon \leqq s$ und Treppenfunktionen

$$\underline{\psi}(\varepsilon) = \sum_{\varkappa=0}^{k-1} g_\varkappa \chi(\varepsilon;\, t_\varkappa,\, t_{\varkappa+1}), \qquad \bar{\psi}(\varepsilon) = \sum_{\varkappa=0}^{k-1} G_\varkappa \chi(\varepsilon;\, t_\varkappa,\, t_{\varkappa+1})$$

mit

$$g_\varkappa = \operatorname*{fin\,inf}_{t_\varkappa \leqq \varepsilon \leqq t_{\varkappa+1}} \psi(\varepsilon;\, s), \qquad G_\varkappa = \operatorname*{fin\,sup}_{t_\varkappa \leqq \varepsilon \leqq t_{\varkappa+1}} \psi(\varepsilon;\, s) \quad (\varkappa = 0, \ldots, k-1)$$

derart, daß

$$\int_{-s}^{s} [\bar{\psi}(\varepsilon) - \underline{\psi}(\varepsilon)]\, d\varepsilon = \sum_{\varkappa=0}^{k-1} (G_\varkappa - g_\varkappa)\,(t_{\varkappa+1} - t_\varkappa) < \frac{\eta}{M}.$$

Es ist

$$\underline{\psi}(\varepsilon) \leqq \psi(\varepsilon;\, s) \leqq \bar{\psi}(\varepsilon) \quad \text{für} \quad -\infty < \varepsilon < \infty$$

und

$$0 \leqq \int_{-s}^{s} \bar{\psi}(\varepsilon)\, \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon - \int_{-s}^{s} \underline{\psi}(\varepsilon)\, \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon \leqq M \int_{-s}^{s} [\bar{\psi}(\varepsilon) - \underline{\psi}(\varepsilon)]\, d\varepsilon < \eta.$$

Ferner ist einerseits

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\psi(\varepsilon_\nu;\, s) \leqq \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\bar{\psi}(\varepsilon_\nu) = \sum_{\varkappa=0}^{k-1} G_\varkappa \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\chi(\varepsilon_\nu;\, t_\varkappa,\, t_{\varkappa+1}),$$

andererseits

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\psi(\varepsilon_\nu;\, s) \geqq \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\underline{\psi}(\varepsilon_\nu) = \sum_{\varkappa=0}^{k-1} g_\varkappa \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\chi(\varepsilon_\nu;\, t_\varkappa,\, t_{\varkappa+1}),$$

also mit Rücksicht auf (5) einerseits

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\psi(\varepsilon_\nu;\, s) \leqq \sum_{\varkappa=0}^{k-1} G_\varkappa \int_{t_\varkappa}^{t_{\varkappa+1}} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = \sum_{\varkappa=0}^{k-1}\int_{t_\varkappa}^{t_{\varkappa+1}} \bar{\psi}(\varepsilon)\,\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

$$= \int_{-s}^{s}\bar{\psi}(\varepsilon)\,\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon < \int_{-s}^{s}\psi(\varepsilon;\, s)\,\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon + \eta,$$

andererseits

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\psi(\varepsilon_\nu;\, s) \geqq \sum_{\varkappa=0}^{k-1} g_\varkappa \int_{t_\varkappa}^{t_{\varkappa+1}} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = \sum_{\varkappa=0}^{k-1}\int_{t_\varkappa}^{t_{\varkappa+1}} \underline{\psi}(\varepsilon)\,\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

$$= \int_{s}^{s}\underline{\psi}(\varepsilon)\,\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon > \int_{-s}^{s}\psi(\varepsilon;\, s)\,\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon - \eta.$$

Da η beliebig nahe bei 0 gewählt werden durfte, folgt hieraus, daß

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\psi(\varepsilon_\nu;\, s) = \int_{-s}^{s}\psi(\varepsilon;\, s)\,\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon,$$

d. h. daß

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\substack{\nu=1\\ |\varepsilon_\nu|\leq s}}^{n}\psi(\varepsilon_\nu) = \int_{-s}^{s}\psi(\varepsilon)\,\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon.$$

Läßt man schließlich $s\to\infty$ gehen, so entsteht die Formel (2*).

§ 5.

Eine weitere hinreichende Bedingung für die Gültigkeit der Formel (2).

1. Die Formel (2) entsteht aus der Formel (2*), indem man die beiden Grenzübergänge vertauscht. Eine Bedingung, unter der diese Vertauschung statthaft ist, enthält Satz 3. Wir wollen jetzt noch eine weitere dafür hinreichende Bedingung angeben.

2. Die verschiedenen Werte, die ε_ν für $\nu = 1, 2, \ldots, n$ annimmt, seien der Größe nach

$$\varepsilon_1' < \varepsilon_2' < \cdots < \varepsilon_s' \qquad (s \leqq n)$$

und der Wert ε'_σ werde n_σ-mal angenommen, so daß

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_s = n$$

ist. Wir setzen

$$F_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\infty < t \leqq \varepsilon'_1, \\ \dfrac{n_1}{n} & \text{für } \varepsilon'_1 < t \leqq \varepsilon'_2, \\ \cdots\cdots\cdots\

konvergieren. Dann gilt die Beziehung

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\psi(\varepsilon_\nu)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\varepsilon)\,\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon\,. \tag{2}$$

Beweis. Da $\psi(\varepsilon)$ stetig und $F_n(t)$ monoton ist, kann der Mittelwert auf der linken Seite von (2) als Stieltjes-Integral geschrieben werden:

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\psi(\varepsilon_\nu)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\varepsilon)\,dF_n(\varepsilon). \tag{10}$$

Und da $\varphi(\varepsilon)$ stetig ist, kann die rechte Seite von (2) entsprechend dargestellt werden:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\varepsilon)\,\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\varepsilon)\,dF(\varepsilon). \tag{11}$$

Für jedes Intervall $a\leqq\varepsilon\leqq b$ ist

$$\int_a^b\psi(\varepsilon)\,dF_n(\varepsilon)-\int_a^b\psi(\varepsilon)\,dF(\varepsilon)=\int_a^b\psi(\varepsilon)\,d[F_n(\varepsilon)-F(\varepsilon)];$$

hieraus folgt wegen der Gültigkeit von (10) und (11) für $a\to-\infty$, $b=u$, bzw. für $a=v$, $b\to\infty$ die Existenz der Integrale

$$\int_{-\infty}^{u}\psi(\varepsilon)\,d[F_n(\varepsilon)-F(\varepsilon)]\quad\text{und}\quad\int_{v}^{\infty}\psi(\varepsilon)\,d[F_n(\varepsilon)-F(\varepsilon)].$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}\int_a^b\psi(\varepsilon)\,d[F_n(\varepsilon)-F(\varepsilon)]&\\ =\psi(b)\,[F_n(b)-F(b)]-\psi(a)\,[F_n(a)-F(a)]-\int_a^b[F_n(\varepsilon)-F(\varepsilon)]\,d\psi(\varepsilon)&.\end{aligned} \tag{12}$$

Nach der Voraussetzung (8) ist, weil $F_n(\varepsilon)=0$ für hinreichend kleine ε und $F_n(\varepsilon)=1$ für hinreichend große ε,

$$\psi(\varepsilon)\,[F_n(\varepsilon)-F(\varepsilon)]\to 0\quad\text{für}\quad|\varepsilon|\to\infty$$

und alle n. Daher folgt aus (12), daß

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{u}\psi(\varepsilon)\,d[F_n(\varepsilon)-F(\varepsilon)]=\psi(u)\,[F_n(u)-F(u)]-\int_{-\infty}^{u}[F_n(\varepsilon)-F(\varepsilon)]\,d\psi(\varepsilon),\\ \displaystyle\int_{v}^{\infty}\psi(\varepsilon)\,d[F_n(\varepsilon)-F(\varepsilon)]=-\psi(v)\,[F_n(v)-F(v)]-\int_{v}^{\infty}[F_n(\varepsilon)-F(\varepsilon)]\,d\psi(\varepsilon).\end{cases} \tag{13}$$

Aus (10), (11), (12) und (13), angewendet mit $a = u$, $b = v$, folgt also, daß

$$(14)\qquad \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\psi(\varepsilon_\nu) - \int_{-\infty}^{\infty}\psi(\varepsilon)\,\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty}\psi(\varepsilon)\,d[F_n(\varepsilon)-F(\varepsilon)]$$

$$= \int_{-\infty}^{u}\psi(\varepsilon)\,d[F_n(\varepsilon)-F(\varepsilon)] + \int_{u}^{v}\psi(\varepsilon)\,d[F_n(\varepsilon)-F(\varepsilon)] + \int_{v}^{\infty}\psi(\varepsilon)\,d[F_n(\varepsilon)-F(\varepsilon)]$$

$$= -\int_{-\infty}^{u}[F_n(\varepsilon)-F(\varepsilon)]\,d\psi(\varepsilon) - \int_{u}^{v}[F_n(\varepsilon)-F(\varepsilon)]\,d\psi(\varepsilon) - \int_{v}^{\infty}[F_n(\varepsilon)-F(\varepsilon)]\,d\psi(\varepsilon).$$

Nun ist bei unseren Voraussetzungen

$$\int_{-\infty}^{u}[F_n(\varepsilon)-F(\varepsilon)]\,d\psi(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{u}[F_n(\varepsilon)-F(\varepsilon)]\,\psi'(\varepsilon)\,d\varepsilon,$$

$$\int_{v}^{\infty}[F_n(\varepsilon)-F(\varepsilon)]\,d\psi(\varepsilon) = \int_{v}^{\infty}[F_n(\varepsilon)-F(\varepsilon)]\,\psi'(\varepsilon)\,d\varepsilon,$$

also mit Rücksicht auf die Voraussetzung (9) für $u < -\varepsilon_0$, $v > \varepsilon_0$

$$\left|\int_{-\infty}^{u}[F_n(\varepsilon)-F(\varepsilon)]\,d\psi(\varepsilon)\right| \leqq \int_{-\infty}^{u}\omega(\varepsilon)\,d\varepsilon,$$

$$\left|\int_{v}^{\infty}[F_n(\varepsilon)-F(\varepsilon)]\,d\psi(\varepsilon)\right| \leqq \int_{v}^{\infty}\omega(\varepsilon)\,d\varepsilon.$$

Zu jeder positiven Zahl η können wir bei unseren Voraussetzungen also Zahlen u und v finden, so daß

$$(15)\qquad \left|\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\psi(\varepsilon_\nu) - \int_{-\infty}^{\infty}\psi(\varepsilon)\,\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon\right| < \eta + \left|\int_{u}^{v}[F_n(\varepsilon)-F(\varepsilon)]\,d\psi(\varepsilon)\right|.$$

Es ist aber, wie wir gleich sehen werden,

$$(16)\qquad \int_{u}^{v}[F_n(\varepsilon)-F(\varepsilon)]\,d\psi(\varepsilon) = \int_{u}^{v}[F_n(\varepsilon)-F(\varepsilon)]\,\psi'(\varepsilon)\,d\varepsilon \to 0 \quad \text{für} \quad n\to\infty.$$

Da η beliebig nahe bei 0 gewählt sein konnte, folgt aus (15) und (16) also die behauptete Gleichung (2).

Die Gültigkeit von (16), d. h. der Beziehung

$$(17)\qquad \int_{u}^{v}F_n(\varepsilon)\,\psi'(\varepsilon)\,d\varepsilon \to \int_{u}^{v}F(\varepsilon)\,\psi'(\varepsilon)\,d\varepsilon \quad \text{für} \quad n\to\infty,$$

kann man dem Satz von Arzelà [13]) entnehmen. Denn es ist nach (7) in $u \leqq \varepsilon \leqq v$

$$F_n(\varepsilon)\,\psi'(\varepsilon) \to F(\varepsilon)\,\psi'(\varepsilon) \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

und, weil $\psi'(\varepsilon)$ in $u \leqq \varepsilon \leqq v$ beschränkt, etwa $|\psi'(\varepsilon)| \leqq S = S(u, v)$, und $0 \leqq F_n(\varepsilon) \leqq 1$ ist, für alle n

$$|F_n(\varepsilon)\,\psi'(\varepsilon)| \leqq S(u, v);$$

die Integranden $F_n(\varepsilon)\,\psi'(\varepsilon)$ sind also gleichmäßig beschränkt und streben gegen die R-integrierbare Grenzfunktion $F(\varepsilon)\,\psi'(\varepsilon)$.

Man braucht hier aber nicht den Arzelàschen Satz heranzuziehen; man kommt auch mit dem einfacheren Satz über Folgen gleichgradig integrierbarer Funktionen aus, den ich kürzlich angab [14]). Dazu ist festzustellen, daß die Funktionen $F_n(\varepsilon)\,\psi'(\varepsilon)$ über das Intervall $u \leqq \varepsilon \leqq v$ gleichgradig integrierbar sind. Es ist für $u \leqq \varepsilon' < \varepsilon'' \leqq v$

$$F_n(\varepsilon')\,\psi'(\varepsilon') - F_n(\varepsilon'')\,\psi'(\varepsilon'') = [F_n(\varepsilon') - F_n(\varepsilon'')]\,\psi'(\varepsilon') + F_n(\varepsilon'')\,[\psi'(\varepsilon') - \psi'(\varepsilon'')],$$

$$|F_n(\varepsilon')\,\psi'(\varepsilon') - F_n(\varepsilon'')\,\psi'(\varepsilon'')| \leqq S\,|F_n(\varepsilon'') - F_n(\varepsilon')| + |\psi'(\varepsilon'') - \psi'(\varepsilon')|.$$

Bei jeder Zerlegung $\mathfrak{z}$ des Intervalles $u \leqq \varepsilon \leqq v$ in Teilintervalle $\langle \varepsilon_\varrho, \varepsilon_{\varrho+1}\rangle$ $(\varrho = 0, \ldots, r-1)$ besteht also zwischen der Schwankung $\sigma_{n\varrho}$ von $F_n(\varepsilon)\,\psi'(\varepsilon)$ und der Schwankung σ_ϱ von $\psi'(\varepsilon)$ im ϱ-ten Teilintervall, weil $F_n(\varepsilon)$ monoton wächst, die Ungleichung

$$\sigma_{n\varrho} \leqq S\,[F_n(\varepsilon_{\varrho+1}) - F_n(\varepsilon_\varrho)] + \sigma_\varrho.$$

Daraus folgt, wenn $\Delta_\mathfrak{z} = \operatorname{Max}(\varepsilon_1 - \varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_r - \varepsilon_{r-1})$ gesetzt wird,

$$\sum_{\varrho=0}^{r-1} \sigma_{n\varrho}(\varepsilon_{\varrho+1} - \varepsilon_\varrho) \leqq S\,\Delta_\mathfrak{z}\,[F_n(v) - F_n(u)] + \sum_{\varrho=0}^{r-1} \sigma_\varrho(\varepsilon_{\varrho+1} - \varepsilon_\varrho)$$

$$\leqq S\,\Delta_\mathfrak{z} + \sum_{\varrho=0}^{r-1} \sigma_\varrho(\varepsilon_{\varrho+1} - \varepsilon_\varrho)$$

und damit, weil die rechte Seite unabhängig von n ist und wegen der R-Integrierbarkeit von $\psi'(\varepsilon)$ durch hinreichend kleine Wahl von $\Delta_\mathfrak{z}$ beliebig klein gemacht werden kann, die gleichgradige Integrierbarkeit der Funktionen $F_n(\varepsilon)\,\psi'(\varepsilon)$ im Intervall $u \leqq \varepsilon \leqq v$.

3. Die Voraussetzungen des Satzes 4 sind für die Funktionen $\psi(\varepsilon) = |\varepsilon^{\varkappa}$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$ insbesondere erfüllt, wenn für alle n

[13]) Den Arzelàschen Satz und Angaben über die ältere Literatur findet man in der Enzyklopädie der math. Wissenschaften Bd. II_3, zweite Hälfte, S. 1076—1078, Angaben über neuere Literatur auch in Fußnote [1]) auf S. 296 meiner in der folgenden Fußnote [14]) genannten Arbeit.

[14]) M. Müller, Folgen gleichgradig integrierbarer Funktionen und die Vertauschbarkeit von Grenzübergang und Integration. Math. Zeitschr. **51**, 1948, S. 294—305. Ich benutze die Gelegenheit zur Berichtigung eines störenden Druckfehlers: Es ist stets H. S. Carslaw (statt H. S. Carlslaw) zu lesen.

und $|\varepsilon| > 1$

$$|\varepsilon|^k |F_n(\varepsilon) - F(\varepsilon)| \leqq \frac{c}{|\varepsilon|^\delta}, \tag{17}$$

wo c und δ positive Konstanten sind. Dann gelten für $\varkappa = 1, 2, \ldots, k$ die Beziehungen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} |\varepsilon_\nu|^\varkappa = \int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon|^\varkappa \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon .$$

Ist $k \geqq 2$ in (17), so gelten also insbesondere für durchschnittlichen Fehler ϑ und mittleren Fehler μ die Formeln

$$\vartheta = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} |\varepsilon_\nu|, \qquad \mu = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu^2}.$$

Die Bedingungen (9), bzw. (17) lassen sich dahin deuten, daß in der Fehlerfolge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu, \ldots$ mit wachsendem ν Fehler von beliebig großem absolutem Betrag nicht zu häufig auftreten dürfen.

(Eingegangen am 18. November 1949.)

Über die Anzahl der Lösungen gewisser diophantischer Gleichungen dritten Grades.

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag am 7. Mai 1950 gewidmet.

Von

Trygve Nagell in Uppsala.

§ 1.

Es bedeute Form eine ganzzahlige, irreduzible, binäre kubische Form mit negativer Diskriminante. Durch (a, b, c, d) bezeichnen wir die Form

$$F(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3.$$

Ihre Diskriminante ist bekanntlich

$$D(F) = b^2c^2 + 18abcd - 4ac^3 - 4db^3 - 27a^2d^2.$$

Führt man auf $F(x, y)$ die ganzzahlige lineare Transformation

$$x = eu + fv, \qquad y = gu + hv$$

aus, so erhält man die neue Form in u und v

$$G(u, v) = a_1u^3 + b_1u^2v + c_1uv^2 + d_1v^3$$

mit $a_1 = F(e, g)$ und $d_1 = F(f, h)$. Die Diskriminante der neuen Form ist gegeben durch

$$D(G) = (eh - fg)^6 . D(F).$$

Die Formen F und G heißen äquivalent, in Zeichen $F \sim G$, wenn die Transformationsdeterminante $eh - fg = \pm 1$ ist. Die Gesamtheit aller untereinander äquivalenten Formen bildet eine Klasse. Äquivalente Formen haben dieselbe Diskriminante.

Es sei N eine ganze Zahl. Wenn es zwei ganze Zahlen x und y gibt, für welche die Gleichung

$$F(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 = N$$

besteht, sagt man, daß N durch die Form (a, b, c, d) darstellbar ist. Sind x und y teilerfremd, so ist die Darstellung eigentlich.

Äquivalente Formen stellen offenbar genau dieselben Zahlen dar; und die Anzahl der Darstellungen ist genau dieselbe.

Einem bekannten Resultate von Axel Thue zufolge ist die Anzahl der Darstellungen einer gegebenen ganzen Zahl endlich.

§ 2.

In einer früheren Arbeit in dieser Zeitschrift[1]) habe ich u. a. den folgenden Satz bewiesen:

Satz 1. *Es gibt höchstens drei Darstellungen der Zahl* 1 *durch eine binäre kubische Form mit negativer Diskriminante, von den folgenden drei Fällen abgesehen: 1) Die Form* $(1, 1, -1, 1)$ *und die damit äquivalenten Formen gestatten genau vier Darstellungen. 2) Die Form* $(1, 0, 1, 1)$ *und die damit äquivalenten Formen gestatten genau vier Darstellungen. 3) Die Form* $(1, 0, -1, 1)$ *und die damit äquivalenten Formen gestatten genau fünf Darstellungen. Im ersten Ausnahmefall ist* $D = -44$, *im zweiten ist* $D = -31$ *und im dritten ist* $D = -23$. *Ist die Anzahl der Darstellungen* $\leqq 3$, *so ist* $D \leqq -59$. *Gibt es drei Darstellungen, so ist die Form äquivalent einer Form* $(1, p, q, 1)$ *mit ganzzahligen Koeffizienten* p *und* q.

Wir setzen nun

$$F(x, y) = a x^3 + b x^2 y + c x y^2 + d y^3$$

und nehmen an, daß die Form (a, b, c, d) drei (oder mehr) Darstellungen der Zahl 1 gestattet. Nach dem letzten Teile des vorstehenden Satzes gibt es dann zwei ganze Zahlen p und q, so daß

$$(a, b, c, d) \sim (1, p, q, 1).$$

Setzen wir

$$G(u, v) = u^3 + p u^2 v + q u v^2 + v^3,$$

so gibt es dann eine lineare ganzzahlige Transformation

$$x = e u + f v, \qquad y = g u + h v,$$

mit $e h - f g = \pm 1$, die die Form $F(x, y)$ in die Form $G(u, v)$ transformiert. Dann gilt offenbar

$$F(e, g) = 1 \quad \text{und} \quad F(f, h) = 1,$$

und es ergibt sich das folgende Resultat:

Hilfssatz. *Gestattet die Form* $F(x, y)$ *drei (oder mehr) Darstellungen der Zahl* 1, *so gibt es zwei ganzzahlige Lösungen* $x = e$, $y = g$ *und* $x = f$, $y = h$ *der Gleichung*

$$F(x, y) = 1,$$

so daß

$$e h - f g = \pm 1.$$

[1]) T. Nagell, Darstellung ganzer Zahlen durch binäre kubische Formen mit negativer Diskriminante, Math. Zeitschrift, Bd. 28 (1929). Vgl. auch T. Nagell, L'Analyse indéterminée de degré supérieur, Mémorial des Sciences Mathématiques, fasc. XXXIX, Paris 1929, p. 48—54.

§ 3.

Es sei $F(x, y)$ eine Form und N eine ganze Zahl $\neq 0$. Das Problem, die Darstellungen der Zahl N durch $F(x, y)$ zu bestimmen, läßt sich dann bekanntlich auf das Problem zurückführen, die Darstellungen der Zahl 1 durch gewisse aus $F(x, y)$ herleitbare Formen zu bestimmen [2]). Dabei erhält man auch leicht eine allein von N abhängige obere Grenze für die Anzahl der Darstellungen der Zahl N.

Wir wollen hier den Fall $N = 2$ näher untersuchen. Es bezeichne M die Anzahl der ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$F(x, y) = a x^3 + b x^2 y + c x y^2 + d y^3 = 2. \tag{1}$$

Hier können x und y nicht gleichzeitig gerade sein. Es sei M_1 die Anzahl der Lösungen von (1) mit ungeradem x und ungeradem y; ferner sei M_2 die Anzahl der Lösungen von (1) mit geradem y und ungeradem x; es sei endlich M_3 die Anzahl der Lösungen von (1) mit ungeradem y und geradem x. Dann ist $M = M_1 + M_2 + M_3$.

Sind x und y beide ungerade, so ist die Zahl $a + b + c + d$ gerade. Durch die Transformation $x = v + 2u$, $y = v$ geht dann die Form (a, b, c, d) in die Form

$$(8a,\ 12a + 4b,\ 6a + 4b + 2c,\ a + b + c + d)$$

hinüber. Hat (a, b, c, d) die Diskriminante D, so hat die neue Form die Diskriminante $D_1 = 2^6 D$. Die Zahl M_1 ist folglich gleich der Anzahl der Darstellungen der Zahl 1 durch die Form

$$(4a,\ 6a + 2b,\ 3a + 2b + c,\ \tfrac{1}{2}(a + b + c + d)). \tag{2}$$

Diese Form hat die Diskriminante $D_2 = \frac{1}{16} D_1 = 4D$. Die Zahl $4D$ kann keinen der Werte -44, -31 oder -23 haben; denn es gibt keine Form mit der Diskriminante -11 [3]). Nach Satz 1 hat somit die Form (2) höchstens drei Darstellungen der Zahl 1, und folglich ist $M_1 \leqq 3$. Wenn $a + c$ ungerade ist, ist sogar $M_1 \leqq 2$. Denn hätte die Gleichung

$$4a u^3 + (6a + 2b) u^2 v + (3a + 2b + c) u v^2 + \tfrac{1}{2}(a + b + c + d) v^3 = 1 \tag{3}$$

drei Lösungen, so müßte es nach dem Hilfssatze in § 2 zwei Lösungen $u = e$, $v = g$ und $u = f$, $v = h$ geben, so daß

$$e h - f g = \pm 1. \tag{4}$$

In der Gleichung (3) ist v ungerade, weil y es ist. In (4) sind also die Zahlen g und h ungerade; die eine von den Zahlen e und f ist

[2]) Vgl. hierzu T. Nagell, L'Analyse indéterminée de degré supérieur, Mémorial des Sciences Mathématiques, fasc. XXXIX, Paris 1929, p. 41—42.

[3]) Siehe G. B. Mathews and W. E. H. Berwick, On the reduction of arithmetical binary cubics which have a negative determinant, Proc. London Math. Soc., 10 (1912), S. 48—53.

dann gerade und die andere ungerade. Aus (3) folgt modulo 2 für gerades u

$$\tfrac{1}{2}(a+b+c+d) \equiv 1 \pmod 2;$$

für ungerades u folgt aber, weil $a+c$ ungerade ist,

$$\tfrac{1}{2}(a+b+c+d) \equiv 0 \pmod 2.$$

Die Zahlen u müssen somit entweder alle gerade oder alle ungerade sein. Die Relation (4) kann folglich nicht bestehen, und es ist $M_1 \leqq 2$.

Es sei nun y gerade und x ungerade; dann ist a gerade. Durch die Transformation $x = u$, $y = 2v$ geht dann die Form (a, b, c, d) in die Form $(a, 2b, 4c, 8d)$ hinüber. Die Zahl M_2 ist folglich gleich der Anzahl der Darstellungen der Zahl 1 durch die Form

$$(\tfrac{1}{2}a,\ b,\ 2c,\ 4d). \tag{5}$$

Diese Form hat offenbar die Diskriminante $4D$. Es ist $4D$ von jeder der Zahlen -44, -31 und -23 verschieden, weil es keine Form mit der Diskriminante -11 gibt. Nach Satz 1 hat somit die Form (5) höchstens drei Darstellungen der Zahl 1, und folglich ist $M_2 \leqq 3$. Wenn b ungerade ist, ist sogar $M_2 \leqq 2$. Denn hätte die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}au^3 + bu^2v + 2cuv^2 + 4dv^3 = 1 \tag{6}$$

drei Lösungen, so müßte es nach dem Hilfssatze in § 2 zwei Lösungen $u = e$, $v = g$ und $u = f$, $v = h$ geben, so daß

$$eh - fg = \pm 1. \tag{7}$$

In der Gleichung (6) ist u ungerade, weil x es ist. In (7) sind also die Zahlen e und f ungerade; die eine von den Zahlen g und h ist dann gerade und die andere ungerade. Aus (6) folgt modulo 2 für gerades v

$$\tfrac{1}{2}a \equiv 1 \pmod 2;$$

für ungerades v folgt aber, weil b ungerade ist,

$$\tfrac{1}{2}a \equiv 0 \pmod 2.$$

Die Zahlen v müssen somit entweder alle gerade oder alle ungerade sein. Die Relation (7) kann folglich nicht bestehen, und es ist $M_1 \leqq 2$.

Sind in (1) alle Koeffizienten gerade, so erhält man durch Division mit 2 eine Darstellung der Zahl 1. Nach Satz 1 ist dann $M \leqq 5$.

Sind in (1) alle Koeffizienten ungerade, so müssen offenbar sowohl x wie y ungerade sein. Nach dem, was soeben bewiesen wurde, ist dann $M = M_1 \leqq 3$.

Sind a, b und c gerade, aber d ungerade, so muß y gerade sein. Dann wird $M = M_2 \leqq 3$.

Sind a, b und d gerade, aber c ungerade, so muß entweder y oder x gerade sein. Man erhält dann offenbar $M = M_2 + M_3 \leqq 3 + 2 = 5$.

Sind a und b gerade, aber c und d ungerade, so muß entweder y gerade sein oder es müssen sowohl x wie y ungerade sein. Man erhält dann $M = M_1 + M_2 \leqq 2 + 3 = 5$.

Sind a und c gerade, aber b und d ungerade, so muß entweder y gerade sein oder es müssen sowohl x wie y ungerade sein. Man erhält dann $M = M_1 + M_2 \leqq 3 + 2 = 5$.

Sind a und d gerade, aber b und c ungerade, so kann jeder von den drei möglichen Fällen auftreten. Man erhält dann $M = M_1 + M_2 + M_3 \leqq 2 + 2 + 2 = 6$.

Ist a gerade, aber b, c und d ungerade, so muß y gerade sein. Dann folgt $M = M_2 \leqq 2$.

Sind a und d ungerade, aber b und c gerade, so müssen sowohl x wie y ungerade sein. Es ist folglich $M = M_1 \leqq 2$.

Sind a, b und d ungerade, aber c gerade, so ist offenbar $M = 0$.

Die übrigen Fälle erhält man durch gleichzeitiges Umtauschen von a und d und von b und c. Alle Möglichkeiten sind dann erledigt.

Wir formulieren nur das folgende spezielle Resultat:

Satz 2. *Es gibt höchstens sechs Darstellungen der Zahl 2 durch eine binäre kubische Form mit negativer Diskriminante.*

Es gibt höchstens zwei Darstellungen der Zahl 2 durch die Form (a, b, c, d) in den folgenden Fällen: 1) a und d sind ungerade, b und c sind gerade; 2) entweder a oder d ist gerade und die übrigen drei Koeffizienten sind ungerade.

§ 4.

Mit derselben Methode wie in § 3 läßt sich auch eine obere Grenze für die Anzahl der Darstellungen der Zahl 4 bestimmen.

Es bezeichne N die Anzahl der ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$F(x, y) = a x^3 + b x^2 y + c x y^2 + d y^3 = 4. \tag{8}$$

Hier können x und y nicht gleichzeitig gerade sein. Es sei N_1 die Anzahl der Lösungen von (8) mit ungeradem x und ungeradem y; ferner sei N_2 die Anzahl der Lösungen von (8) mit geradem y und ungeradem x; es sei endlich N_3 die Anzahl der Lösungen von (8) mit ungeradem y und geradem x. Dann ist $N = N_1 + N_2 + N_3$.

Sind x und y beide ungerade, so ist $x \equiv \pm y \pmod 4$ entweder für das obere oder für das untere Zeichen. Durch die Transformation $x = \pm v + 2u$, $y = v$ geht dann die Form (a, b, c, d) in die Form

$$(64a, \pm 48a + 16b, 12a \pm 8b + 4c, \pm a + b \pm c + d)$$

hinüber. Die Zahl N_1 ist folglich gleich der Anzahl der Darstellungen der Zahl 1 durch die ganzzahlige Form

$$(16a, \pm 12a + 4b, 3a \pm 2b + c, \tfrac{1}{4}(\pm a + b \pm c + d)).$$

Diese Form hat die Diskriminante $16D$. Durch dasselbe Räsonnement wie in § 3 ergibt sich dann: Es ist $N_1 \leqq 3$ und sogar $\leqq 2$, wenn $a + c$ ungerade ist.

Ist y gerade und x ungerade, so muß a gerade sein. Die Zahl N_2 ist dann gleich der Anzahl der Darstellungen der Zahl 2 durch die Form

$$(\tfrac{1}{2}a, b, 2c, 4d).$$

Nach dem, was soeben in § 3 bewiesen wurde, ist somit $N_2 \leqq 5$.

Ist x gerade und y ungerade, so muß d gerade sein. Die Zahl N_3 ist dann gleich der Anzahl der Darstellungen der Zahl 2 durch die Form

$$(4a, 2b, c, \tfrac{1}{2}d).$$

Nach dem, was soeben in § 3 bewiesen wurde, ist somit $N_3 \leqq 5$.

Ist a ungerade, so ist offenbar $N_2 = 0$ und $N = N_1 + N_3 \leqq 3 + 5 = 8$. Ist d ungerade, so ist $N_3 = 0$ und $N = N_1 + N_2 \leqq 3 + 5 = 8$.

Sind sowohl a wie d ungerade, so müssen b und c gerade sein; dann ist $a + c$ ungerade und somit $N = N_1 \leqq 2$.

Es seien demnächst a und d beide gerade. Sind dann b und c gerade, so ist N gleich der Anzahl der Darstellungen der Zahl 2 durch die Form $(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b, \frac{1}{2}c, \frac{1}{2}d)$ und somit $N \leqq 6$. Sind b und c beide ungerade, so ist $a + c$ ungerade und somit $N_1 \leqq 2$ und $N = N_1 + N_2 + N_3 \leqq 2 + 5 + 5 = 12$. Ist die eine der Zahlen b und c gerade und die andere ungerade, so ist $N_1 = 0$ und $N = N_2 + N_3 \leqq 10$.

Wir formulieren das spezielle Resultat:

Satz 3. *Es gibt höchstens zwölf Darstellungen der Zahl 4 durch eine binäre kubische Form mit negativer Diskriminante.*

Es gibt höchstens zwei Darstellungen der Zahl 4 durch die Form (a, b, c, d), *wenn* a *und* d *ungerade,* b *und* c *gerade sind.*

§ 5.

Es fehlt noch eine allgemeine Methode, um die eventuellen Darstellungen einer gegebenen ganzen Zahl durch eine gegebene kubische Form zu bestimmen. Wir haben auch kein Mittel, um zu entscheiden, ob die Zahl 1 durch eine gegebene Formenklasse darstellbar sei oder nicht. In einigen speziellen Fällen gelingt es aber, mit verschiedenen Methoden die sämtlichen Darstellungen der Zahl 1 zu bestimmen; vgl. hierzu meine oben zitierte Arbeit ‚L'Analyse indéterminée de degré supérieur', p. 41—51.

Wir betrachten zuletzt einige numerische Beispiele.

Die diophantische Gleichung

$$x^3 - x^2y + xy^2 + y^3 = 2$$

hat offenbar die Lösungen $x = y = 1$ und $x = 1$, $y = -1$. Nach Satz 2 gibt es keine weitere Lösung dieser Gleichung.

Demselben Satz zufolge hat die diophantische Gleichung

$$x^3 + 2x^2y - 2xy^2 + y^3 = 2$$

genau die beiden Lösungen $x = y = 1$ und $x = 3,\ y = -1$.

Die diophantische Gleichung

$$2x^3 - 3xy^2 + 2y^3 = 2 \tag{9}$$

hat die Lösungen $x = 0,\ y = 1;\ x = 1,\ y = 0;\ x = 3,\ y = -2$.

Um die eventuellen übrigen Lösungen zu finden, verfahren wir wie in § 3. Für gerades y erhält man dann die Gleichung

$$u^3 - 6uv^2 + 8v^3 = 1 \tag{10}$$

und für gerades x die Gleichung

$$u^3 - 3u^2v + 8v^3 = 1. \tag{11}$$

Nach den Überlegungen in § 3 hat die Gleichung (10) höchstens drei und die Gleichung (11) höchstens zwei Lösungen. Mittelst der sogen. „Methode der Erhöhung" ist es jedoch möglich zu zeigen, daß die Gleichung (10) genau zwei Lösungen hat, nämlich $u = 1,\ v = 0$ und $u = 3,\ v = -1$, und daß die Gleichung (11) die einzige Lösung $u = 1,\ v = 0$ hat. Die Gleichung (9) hat somit genau die oben angegebenen drei Lösungen.

Interessante Beispiele mit höchstens zwei Lösungen erbieten die Gleichungen

$$Ax^3 + By^3 = 2 \tag{12}$$

und

$$Ax^3 + By^3 = 4, \tag{13}$$

wo A und B ungerade sind. (Nach den letzten Teilen von den Sätzen 2 und 3.) Ich kenne übrigens bisher keine Gleichung weder von der Form (12) noch von der Form (13) mit zwei Lösungen. Die Möglichkeit besteht deshalb, daß es höchstens eine Darstellung der Zahl 2 oder der Zahl 4 durch die Form $(A, 0, 0, B)$ gibt.

In gewissen Fällen gelingt es, die Darstellungen zu bestimmen. Als Beispiel betrachten wir die Gleichung

$$x^3 + 3y^3 = 2. \tag{14}$$

Sie hat die Lösung $x = -1,\ y = 1$. Es sei $\Theta = \sqrt[3]{3}$. Im kubischen Körper $K(\Theta)$ ist bekanntlich $\Theta^2 - 2$ die zwischen 0 und 1 belegene Fundamentaleinheit. Aus (14) folgt dann

$$x + \Theta y = (\Theta - 1)(\Theta^2 - 2)^m, \tag{15}$$

wo m eine ganze Zahl ist. Wegen

$$0 < \frac{x + \Theta y}{\Theta - 1} = \frac{1 + \Theta + \Theta^2}{x^2 - \Theta xy + \Theta^2 y^2} \leqq 1$$

muß in (15) $m \geqq 0$ sein. Aus (15) folgt dann durch Nullsetzen des Koeffizienten von Θ^2:

$$\binom{m}{1} 2^{m-1} + \sum_{k=1} (-1)^k \binom{m}{3k+1} 2^{m-3k-1} \cdot 3^{2k} = \sum_{k=1} (-1)^k \binom{m}{3k-1} 2^{m-3k+1} \cdot 3^{2k-1}.$$

Ist $m \geqq 1$, folgt hieraus durch Division mit m:

$$2^{m-1} + \sum_{k=1} (-1)^k \binom{m-1}{3k} \frac{2^{m-3k-1} \cdot 3^{2k}}{3k+1} = \sum_{k=1} (-1)^k \binom{m-1}{3k-2} \frac{2^{m-3k+1} \cdot 3^{2k-1}}{3k-1}.$$

Diese Gleichung ist aber unmöglich modulo 3. Die Relation (15) besteht somit nur für $m = 0$, und die Gleichung (14) hat die einzige Lösung $x = -1$, $y = 1$.

Genau in derselben Weise behandelt man die Gleichung

$$x^3 + 3y^3 = 4. \tag{16}$$

Aus ihr folgt

$$x + \Theta y = (\Theta + 1)(\Theta^2 - 2)^m.$$

Wie oben beweist man, daß diese Relation nur für $m = 0$ bestehen kann. Die Gleichung (16) hat folglich keine Lösung außer der trivialen $x = y = 1$.

(Eingegangen am 15. Dezember 1949.)

Theorie der Supraleitung

Von

Professor Dr. **M. von Laue**

Göttingen

Zweite Auflage

Mit 37 Textabbildungen. III, 115 Seiten. 1949

DMark 16.40

Inhaltsverzeichnis

Einleitung — Die grundlegenden Tatsachen — Die Stromverteilung zwischen parallel geschalteten Supraleitern — Die Grundgleichungen der Maxwell-Londonschen Theorie — Raumladungen im kubischen Supraleiter — Die Erhaltung der Energie — Die Telegraphengleichung für kubische Supraleiter — Stationäre Felder — Der stromdurchflossene Draht — Der stromdurchflossene Hohlzylinder — Der Zylinder im homogenen Magnetfeld — Die Kugel im homogenen Magnetfeld — Dauerströme — Die Maxwell-Londonschen Spannungen. — Das elektrodynamische Potential — Elektrische Wellen in kubischen Supraleitern. — Der Hochfrequenzwiderstand der Supraleiter — Die Thermodynamik des Übergangs vom Normal- zum Supraleiter — Der Grenzwert der magnetischen Feldstärke für „dünne" Supraleiter — Der Zwischenzustand — Eine nicht-lineare Erweiterung der Theorie (Zusatz bei der Korrektur). — Mathematischer Anhang. [Beweis der Gleichung (14. 8.)] — Namen- und Sachverzeichnis.

Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften

Herausgegeben von

Professor Dr. **S. Flügge** und Professor Dr. **F. Trendelenburg**

Marburg a. Lahn — Weil a. Rhein

Unter Mitwirkung von

Professor Dr. **W. Bothe** Heidelberg — Professor Dr. **F. Hund** Jena — Professor Dr. **P. Harteck** Hamburg

Zweiundzwanzigster Band

Mit 195 Abbildungen. III, 332 Seiten. 1949

DMark 48.—

Inhaltsübersicht:

Transurane. Von Professor Dr. S. Flügge-Marburg — Die Elektronenschleuder. Von Professor Dr. H. Kopfermann-Göttingen — Die Entwicklung der Elektronenlawine in den Funkenkanal. (Nach Untersuchungen in der Nebelkammer.) Von Professor Dr. H. Raether-Sceaux (Seine) — Molekulare Schallabsorption und -dispersion. Von Professor Dr. H. O. Kneser-Göttingen — Röntgenbestimmungen der Atomanordnung in flüssigen und amorphen Stoffen. Von Professor Dr. R. Glocker-Stuttgart — Ursprung und Eigenschaften der kosmischen Strahlung. Von Professor Dr. E. Bagge-Hamburg — Ionosphäre. Von Professor Dr. J. Zenneck-Althegnenberg (Obbay.) Inhalt der Bände 1 bis 22 — Namen- und Sachverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Lehrbuch
der
theoretischen Physik

Von

Walter Weizel

Professor der Physik an der Universität Bonn

In zwei Bänden

Erster Band:

Physik der Vorgänge

Bewegung, Elektrizität, Licht, Wärme

Mit 270 Textabbildungen. XV, 771 Seiten. 1949.

DMark 53.—; Ganzleinen DMark 56.90

Zweiter Band:

Struktur der Materie

Erscheint im Sommer 1950. Jeder Band ist einzeln käuflich.

Dieses neue, zweibändige Lehrbuch unterscheidet sich von seinen Vorgängern hauptsächlich dadurch, daß der Quantentheorie der ihr zukommende Platz angewiesen ist und daß, um den Inhalt des Buches näher an den Stand der Forschung heranzuführen oder die Brücke zu manchen technischen Anwendungen zu schlagen, vielfach auch Gegenstände aufgenommen wurden, die sonst in Lehrbüchern nicht berücksichtigt werden.

Der erste Band behandelt im wesentlichen die Gebiete der klassischen Physik: Mechanik der Punkte und starren Körper, Mechanik der Kontinua, Elektrodynamik, Optik, Relativitätstheorie und Thermodynamik. Der zweite Band beginnt aus didaktischen Gründen mit einer elementaren Atomtheorie, an die sich erst im zweiten Teil die systematische Behandlung der Quantentheorie anschließt. Die Theorie der Atomkerne ist noch zu sehr im Werden, als daß sie schon zur Grundlage der Darstellung der Struktur der Materie gemacht werden könnte und wird infolgedessen am Schluß des Buches abgehandelt.

Die meisten Abschnitte verlangen zum Verständnis an mathematischen Hilfsmitteln neben den Elementen der analytischen Geometrie und der Kenntnis der Vektoranalysis nur die sichere Beherrschung der Infinitesimalrechnung und der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Sie sollten daher dem Studenten der mittleren Semester keine großen Schwierigkeiten bereiten. Einzelne Gegenstände — Krystalloptik, Diracsche Theorie, Theorie der Siebketten — setzen größere Vorkenntnisse voraus; sie sind durch einen Stern gekennzeichnet.

Besondere Einrichtungen wurden getroffen, um dem Leser die Orientierung in dem Buch zu erleichtern.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Veröffentlicht unter Zulassung Nr. 100 der Britischen Militärregierung.
Springer-Verlag / Berlin · Göttingen · Heidelberg.
Druck: Dieterichsche Universitäts-Buchdruckerei W. Fr. Kaestner, Göttingen. — Printed in Germany.